離散凸解析の経済モデルへの応用

田村 明久

慶應義塾大学 理工学部

2023 年 3 月 15 日

目次

離散凸集合から始めるわけ

- 「ミクロ経済学の力」を読んでみて凸集合 > 凸関数
- 神取先生からの宿題（Shapley-Folkman の補題と離散凸集合）
- $f : \mathbf{Z}^m \times \mathbf{R}^m \to \mathbf{R} \cup \{-\infty\}$：効用関数 (or 評価関数)

$$f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{p}) = \left\{ \begin{array}{l} \text{不可分財ベクトル } \boldsymbol{x} \in \mathbf{Z}^m \\ \text{財の価格ベクトル } \boldsymbol{p} \in \mathbf{R}^m \end{array} \right\} \text{に対する効用}$$

$D : \mathbf{R}^m \to 2^{\mathbf{Z}^m}$：需要集合

$$D(\boldsymbol{p}) = \arg\max\{f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{p}) \mid \boldsymbol{x} \in \mathbf{Z}^m\} (\subseteq \mathbf{Z}^m)$$

主体 $j \in N = \{1, 2, \ldots, n\}$ の需要集合 D_j の構造次第で，財の総供給量 $\boldsymbol{s} \in \mathbf{Z}^m$ に対し競争均衡 $(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n; \boldsymbol{p})$ が存在する

$$\boldsymbol{x}_j \in D_j(\boldsymbol{p}) \ (j = 1, \ldots, n), \qquad \sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{x}_j \ \overset{=}{\underset{\leq}{}} \ \boldsymbol{s}$$

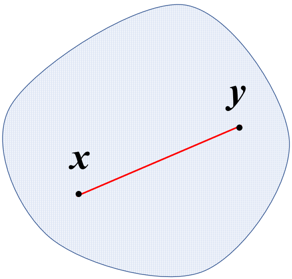
凸集合

定義

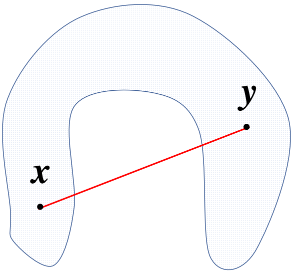
$S \subseteq \mathbf{R}^m$: 凸集合

$$\Updownarrow_{\text{def}}$$

$${}^\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in S,\ {}^\forall \lambda \in [0,1],\ \lambda \boldsymbol{x} + (1-\lambda)\boldsymbol{y} \in S$$



凸



非凸

分離定理

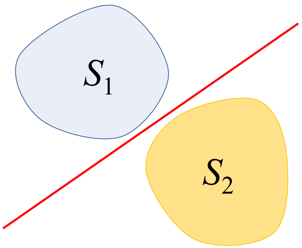
定理

$S_1, S_2 \subseteq \mathbf{R}^m$: 非空な凸集合
$S_1 \cap S_2 = \emptyset$

$\Longrightarrow$

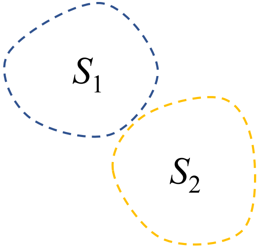
$$
\begin{aligned}
&{}^\exists \boldsymbol{a} \in \mathbf{R}^m, {}^\exists b \in \mathbf{R} \\
&\quad \boldsymbol{a}^\top \boldsymbol{x} \geq b \quad ({}^\forall \boldsymbol{x} \in S_1) \\
&\quad \boldsymbol{a}^\top \boldsymbol{y} \leq b \quad ({}^\forall \boldsymbol{y} \in S_2)
\end{aligned}
$$

例)



強分離

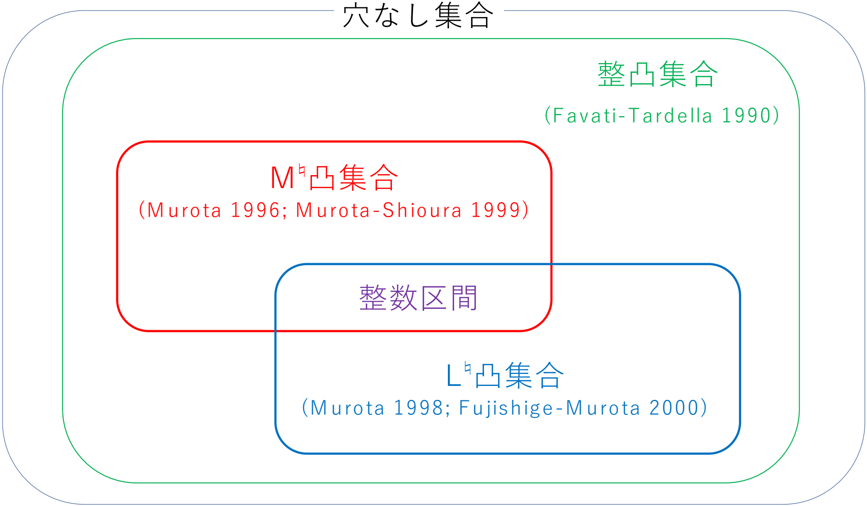
例)



この場合もOK

離散凸集合

$S \subseteq \mathbf{Z}^m$



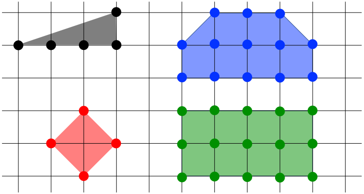
穴なし集合と整数区間

$S \subseteq \mathbf{Z}^m$ が穴なし集合

$\Updownarrow_{\text{def}}$

$S = \overline{S} \cap \mathbf{Z}^m$　（$\overline{S}$: S の凸包）

（赤い点集合は穴なし集合でない）

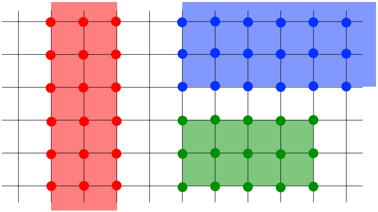


$S \subseteq \mathbf{Z}^m$ が整数区間

$\Updownarrow_{\text{def}}$

$S = \{\boldsymbol{x} \in \mathbf{Z}^m \mid \boldsymbol{p} \leq \boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{q}\}$

for $\boldsymbol{p} \leq \boldsymbol{q}$



穴なし性は '離散的' 凸性には必要だが，良い構造とは言えそうにない．整数区間は特殊過ぎる．

M$^\natural$ 凸集合

定義 (Murota-Shioura 1999)

$S \subseteq \mathbf{Z}^m$: M$^\natural$ 凸集合

$$\Updownarrow_{\text{def}}$$

$$^\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in S, \ ^\forall u \in \mathrm{supp}^+(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}), \ ^\exists v \in \{0\} \cup \mathrm{supp}^-(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}),$$
$$\boldsymbol{x} - \boldsymbol{e}_u + \boldsymbol{e}_v \in S, \quad \boldsymbol{y} + \boldsymbol{e}_u - \boldsymbol{e}_v \in S$$

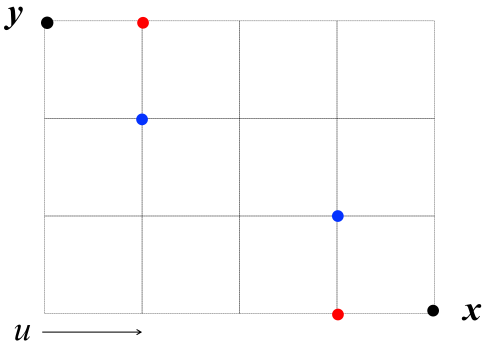
ただし
$$\begin{aligned}
\mathrm{supp}^+(\boldsymbol{z}) &= \{v \in \{1,\ldots,m\} \mid z(v) > 0\} \\
\mathrm{supp}^-(\boldsymbol{z}) &= \{v \in \{1,\ldots,m\} \mid z(v) < 0\} \\
\boldsymbol{e}_u(i) &= \begin{cases} 1 & (i = u) \\ 0 & (i \neq u) \end{cases} \quad (i \in V) \\
e_0 &= \mathbf{0}
\end{aligned}$$

M 凸集合のという概念は Murota 1996 による．

M$^\natural$ 凸集合

M$^\natural$ 凸集合

$$^\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in S, \; ^\forall u \in \mathrm{supp}^+(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}), \; ^\exists v \in \{0\} \cup \mathrm{supp}^-(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}),$$
$$\boldsymbol{x} - \boldsymbol{e}_u + \boldsymbol{e}_v \in S, \quad \boldsymbol{y} + \boldsymbol{e}_u - \boldsymbol{e}_v \in S$$



L$^\natural$ 凸集合

定義 (Fujishige-Murota 2000)

$T \subseteq \mathbf{Z}^m$: L$^\natural$ 凸集合

$$\Updownarrow_{\mathrm{def}}$$

$$\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q} \in T \Longrightarrow \left\lceil \frac{\boldsymbol{p}+\boldsymbol{q}}{2} \right\rceil, \left\lfloor \frac{\boldsymbol{p}+\boldsymbol{q}}{2} \right\rfloor \in T$$

$\left\lceil \frac{\boldsymbol{p}+\boldsymbol{q}}{2} \right\rceil$ は成分ごとの小数点以下切上げ

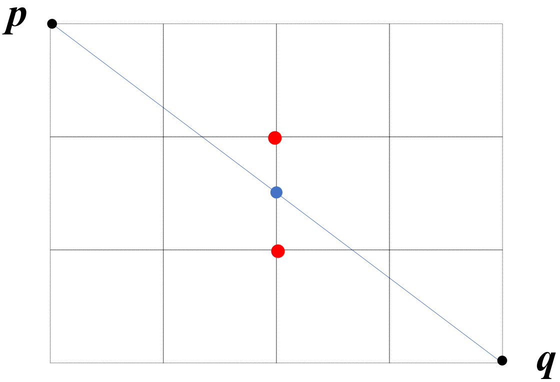
$\left\lfloor \frac{\boldsymbol{p}+\boldsymbol{q}}{2} \right\rfloor$ は成分ごとの小数点以下切捨て

L 凸集合のという概念は Murota 1998 による．

L♮ 凸集合

L♮ 凸集合

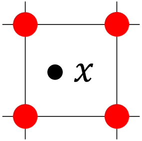
$$p, q \in T \implies \left\lceil \frac{p+q}{2} \right\rceil, \left\lfloor \frac{p+q}{2} \right\rfloor \in T$$

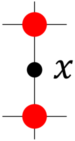


整凸集合

整数近傍：$\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^m$ に対し

$$N(\boldsymbol{x}) = \{\boldsymbol{z} \in \mathbf{Z}^m \mid \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{z}\|_\infty < 1\}$$
$$= \{\boldsymbol{z} \in \mathbf{Z}^m \mid \lfloor \boldsymbol{x} \rfloor \leq \boldsymbol{z} \leq \lceil \boldsymbol{x} \rceil\}$$

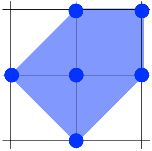




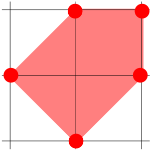
定義 (Favati-Tardella 1990)

$S \subseteq \mathbf{Z}^m$ が**整凸集合** $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\boldsymbol{x} \in \overline{S} \Longrightarrow \boldsymbol{x} \in \overline{S \cap N(\boldsymbol{x})}$

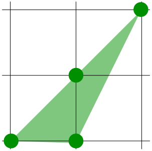
$\overline{S}$：S の凸包



整凸



非整凸

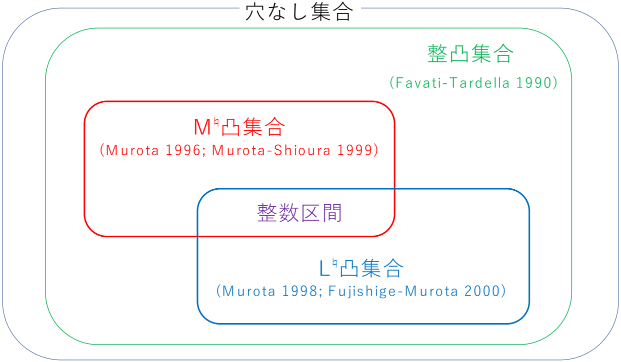


非整凸

離散凸性の関係

命題

- {整数区間} ⊂ {M$^\natural$ 凸} ⊂ {整凸} ⊂ {穴なし}
- {整数区間} ⊂ {L$^\natural$ 凸} ⊂ {整凸} ⊂ {穴なし}
- {M$^\natural$ 凸} ∩ {L$^\natural$ 凸} = {整数区間}

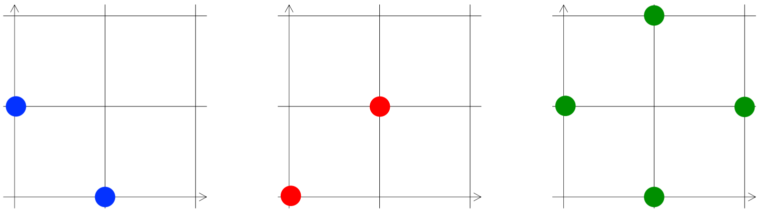


Minkowski 和

定義 (Minkowski 和)

集合 $Q_1, \ldots, Q_n \subseteq \mathbf{R}^m$ の Minkowski 和

$$\sum_{j=1}^n Q_j = \{\sum_{j=1}^n \boldsymbol{x}_j \mid \boldsymbol{x}_j \in Q_j,\ (j = 1, \ldots, n)\}$$



S_1 $\{(1,0),(0,1)\}$

S_2 $\{(0,0),(1,1)\}$

$S_1 + S_2$ $\left\{\begin{matrix}(1,0),(0,1)\\(2,1),(1,2)\end{matrix}\right\}$

通常の凸性は Minkowski 和に関して閉じる

Shapley-Folkman の補題

補題 (Shapley-Folkman の補題)

$Q_1, \ldots, Q_n \subseteq \mathbf{R}^m$: 非空で有界な集合，　$Q = \sum_{j=1}^n Q_j$

任意の $\boldsymbol{x} \in \overline{Q}$ に対し，次を満たす $\boldsymbol{y}_j$ $(j{=}1, \ldots, n)$ が存在

$\boldsymbol{x} = \sum_{j=1}^n \boldsymbol{y}_j$

$\boldsymbol{y}_j \in \overline{Q_j}$ (高々 m 個の j),　$\boldsymbol{y}_j \in Q_j$ (その他の j)

n を増やせば Q は凸集合に近づく

系 (Cassels 1975)

$S_1, \ldots, S_n \subseteq \{0,1\}^m$，任意の $\boldsymbol{x} \in \left(\sum_{j=1}^n \overline{S_j}\right) \cap \mathbf{Z}^m$ に対し，

次を満たす $\boldsymbol{y}_j \in S_j$ $(j{=}1, \ldots, n)$ が存在

$\|\boldsymbol{x} - \sum_{j=1}^n \boldsymbol{y}_j\|_\infty \le m$

Nguyen-Vohra の定理

定義 (Δ-uniform)

$S \subseteq \{0,1\}^m$: Δ-uniform

$\Updownarrow_{\text{def}}$

$\overline{S}$ のすべての辺 $e \in \{-1,0,+1\}^m$ について $\|e\|_1 \leq \Delta$

例） M♮ 凸集合は特殊な 2-uniform

定理 (Nguyen-Vohra 2020(Cassels の精緻化))

$S_1,\ldots,S_n \subseteq \{0,1\}^m$ が Δ-uniform のとき，任意の $\boldsymbol{x} \in \left(\sum_{j=1}^n \overline{S_j}\right) \cap \mathbf{Z}^m$ に対し，

次を満たす $\boldsymbol{y}_j \in S_j$ $(j=1,\ldots,n)$ が存在

$$\|\boldsymbol{x} - \textstyle\sum_{j=1}^n \boldsymbol{y}_j\|_\infty \leq \Delta - 1$$

Minkowski 和（M$^\natural$ 凸性）

命題 (M$^\natural$ 凸性の保存)

$S_1, \cdots, S_n \in \mathbf{Z}^m$: M$^\natural$ 凸集合 $\Longrightarrow$ $\sum_{j=1}^{n} S_j$: M$^\natural$ 凸集合

系

$S_1, \ldots, S_n \in \mathbf{Z}^m$: M$^\natural$ 凸集合のとき，任意の
$\boldsymbol{x} \in \left(\sum_{j=1}^{n} \overline{S_j}\right) \cap \mathbf{Z}^m$ に対し，$\boldsymbol{y}_j \in S_j$ $(j=1,\ldots,n)$ が存在し

$$\boldsymbol{x} = \sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{y}_j$$

主体 $j \in N = \{1, \ldots, n\}$ の需要集合 D_j が任意の価格ベクトル $\boldsymbol{p} \in \mathbf{R}^m$ に対し M$^\natural$ 凸集合ならば，競争均衡の存在が期待される．

$$\boldsymbol{y}_j \in D_j(\boldsymbol{p}) \ (j = 1, \ldots, n), \qquad \sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{y}_j = \boldsymbol{s}$$

Minkowski 和（L$^\natural$ 凸性，整凸性）

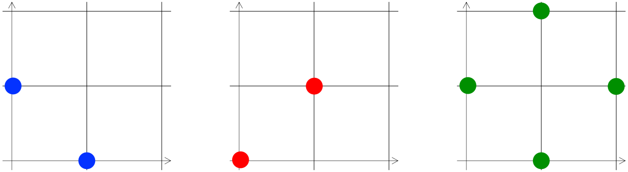
L$^\natural$ 凸性は Minkowski 和で保存されない

$$\left.\begin{aligned} T_1 &= \{(0,0,0),(1,1,0)\} \\ T_2 &= \{(0,0,0),(1,0,1)\} \\ T_3 &= \{(0,0,0),(0,1,1)\} \end{aligned}\right\} \text{L}^\natural \text{ 凸集合}$$

$(0,0,0),(2,2,2) \in T = T_1 + T_2 + T_3$ より，$(1,1,1) \in \overline{T}$

しかし $(1,1,1) \notin T$

整凸性は Minkowski 和で保存されない



L$^\natural$ 凸集合の束構造

命題

L$^\natural$ 凸集合 $T \subseteq \mathbf{Z}^m$，$\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q} \in T$ に対して

$$\boldsymbol{p} \vee \boldsymbol{q} \in T, \quad \boldsymbol{p} \wedge \boldsymbol{q} \in T$$

ただし $\begin{array}{ll} (\boldsymbol{p} \vee \boldsymbol{q})(i) & = \max\{\boldsymbol{p}(i), \boldsymbol{q}(i)\} \\ (\boldsymbol{p} \wedge \boldsymbol{q})(i) & = \min\{\boldsymbol{p}(i), \boldsymbol{q}(i)\} \end{array} \quad (i = 1, \ldots, m)$

有界な L$^\natural$ 凸集合は最小点，最大点をもつ

均衡価格ベクトル全体が L$^\natural$ 凸集合となる場合がある

M$^\natural$ 凸集合は $\vee, \wedge$ について閉じていない

整凸集合に対する不動点定理

$S \subseteq \mathbf{Z}^m$: 非空整凸集合，　$\Gamma : S \to 2^S \setminus \{\emptyset\}$

$\pi_\Gamma(\boldsymbol{x}) = \arg\min\{\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|_2 \mid \boldsymbol{y} \in \overline{\Gamma(\boldsymbol{x})}\}$

定義 (Iimura 2003)

Γ : 方向保存 $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$

任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}' \in S$ $(\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'\|_\infty \leq 1)$ と $i = 1, \ldots, m$ に対し，

$$(\pi_\Gamma(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{x})(i) > 0 \Longrightarrow (\pi_\Gamma(\boldsymbol{x}') - \boldsymbol{x}')(i) \geq 0$$

Γ : 穴なし $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\Gamma(\boldsymbol{x})$: 穴なし集合 $(\forall \boldsymbol{x} \in S)$

$\boldsymbol{x}^* \in S$ が Γ の不動点 $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\boldsymbol{x}^* \in \overline{\Gamma(\boldsymbol{x}^*)}$

定理 (Iimura-Murota-T. 2005)

S が非空整凸で，Γ が穴なし方向保存ならば不動点をもつ

目次

凸関数

$f : \mathbf{R}^m \to \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$

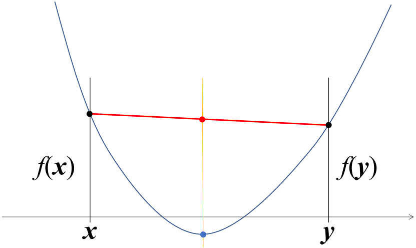
定義

$\mathrm{dom}\, f = \{\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^m \mid f(\boldsymbol{x}) \in \mathbf{R}\}$: f の実効定義域

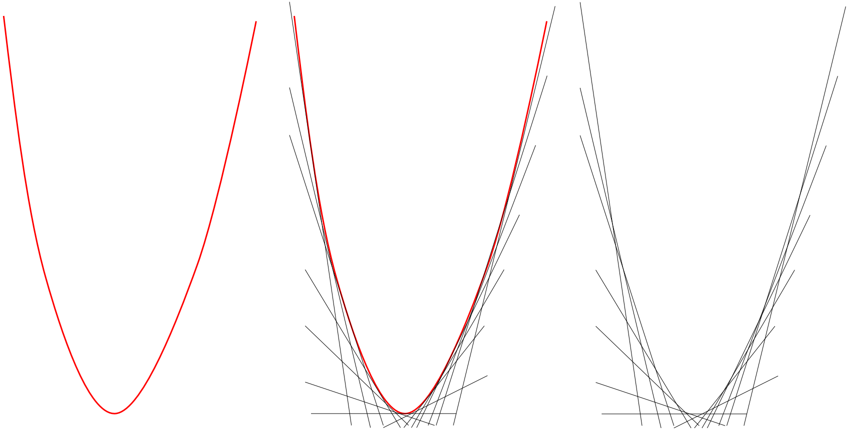
定義

f : 凸関数 $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ ${}^\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbf{R}^m, {}^\forall \lambda \in [0, 1]$:

$$f(\lambda \boldsymbol{x} + (1 - \lambda)\boldsymbol{y}) \leq \lambda f(\boldsymbol{x}) + (1 - \lambda) f(\boldsymbol{y})$$



凸関数と接線 (接平面)



凸関数の形状が無数の接線 (接平面) から理解できそう！

凸共役関数

$f: \mathbf{R}^m \to \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$ $(\mathrm{dom}\, f \neq \emptyset)$

定義

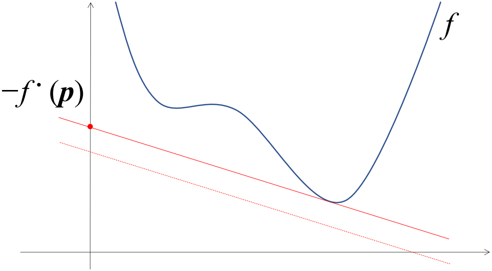
$f^\bullet : \mathbf{R}^m \to \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$: f の凸共役関数

$\Updownarrow_{\mathrm{def}}$

$$f^\bullet(\boldsymbol{p}) = \sup\{\langle \boldsymbol{p}, \boldsymbol{x}\rangle - f(\boldsymbol{x}) \mid \boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^m\} \quad (\boldsymbol{p} \in \mathbf{R}^m)$$

$$\langle \boldsymbol{p}, \boldsymbol{x}\rangle = \textstyle\sum_{i=1}^m \boldsymbol{p}(i)\boldsymbol{x}(i)$$

$f^\bullet(\boldsymbol{p})$ は
すべての $\boldsymbol{x}$ に対し
$f(\boldsymbol{x}) \geq \langle \boldsymbol{p}, \boldsymbol{x}\rangle - \alpha$
を満たす α の下限



凸共役関数の凸性

命題

$f^\bullet$ は $\boldsymbol{p}$ に関して凸関数

証明の概要：

1. 添字集合 Λ と各 $\lambda \in \Lambda$ に対して凸関数 $f_\lambda : \mathbf{R}^m \to \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$ が与えれれているとき，
$$f(\boldsymbol{x}) = \sup_{\lambda \in \Lambda}\{f_\lambda(\boldsymbol{x})\}$$
は $\boldsymbol{x}$ に関して凸関数．
2. $f^\bullet$ については，$\mathbf{R}^m$ が添字集合で，各 $\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^m$ に対して，$\langle \boldsymbol{p}, \boldsymbol{x} \rangle - f(\boldsymbol{x})$ という $\boldsymbol{p}$ に関する１次関数（凸関数）が与えれれている（以前のスライド参照）．

凹共役関数

$g : \mathbf{R}^m \to \mathbf{R} \cup \{-\infty\}$

定義

$g^\circ : \mathbf{R}^m \to \mathbf{R} \cup \{-\infty\}$: g の凹共役関数

$$\Updownarrow_{\text{def}}$$

$$g^\circ(\boldsymbol{p}) = \inf\{\langle \boldsymbol{p}, \boldsymbol{x}\rangle - g(\boldsymbol{x}) \mid \boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^m\} \quad (\boldsymbol{p} \in \mathbf{R}^m)$$

凸共役と凹共役の関係

$$\begin{aligned} g^\circ(\boldsymbol{p}) &= \inf_{\boldsymbol{x}}\{\langle \boldsymbol{p}, \boldsymbol{x}\rangle - g(\boldsymbol{x})\} \\ &= \inf_{\boldsymbol{x}}\{-(\langle -\boldsymbol{p}, \boldsymbol{x}\rangle + g(\boldsymbol{x}))\} \\ &= -\sup_{\boldsymbol{x}}\{\langle -\boldsymbol{p}, \boldsymbol{x}\rangle - (-g)(\boldsymbol{x})\} = -(-g)^\bullet(-\boldsymbol{p}) \end{aligned}$$

フェンシェル双対定理

定理

- $f : \mathbf{R}^m \to \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$ 凸関数
- $g : \mathbf{R}^m \to \mathbf{R} \cup \{-\infty\}$ 凹関数
- ある種の前提条件
  ($\mathrm{dom}\, f, \mathrm{dom}\, g$ の相対的内点集合の交わりが非空,
  f, g が多面体的など)
- $\mu = \inf\{f(\boldsymbol{x}) - g(\boldsymbol{x}) \mid \boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^m\} \in \mathbf{R}$ 　　ならば

$$\inf_{\boldsymbol{x}}\{f(\boldsymbol{x}) - g(\boldsymbol{x})\} = \max_{\boldsymbol{p}}\{g^\circ(\boldsymbol{p}) - f^\bullet(\boldsymbol{p})\}$$

左辺は inf なので最小解の存在は主張せず,
右辺は max なので最大解 p^* の存在も主張

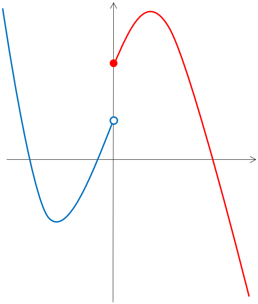
分離定理

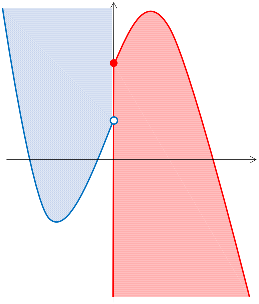
定理 (分離定理)

- f：凸関数，　　g：凹関数
- ある種の前提条件　$(\mathrm{ri}(\mathrm{dom}\, f) \cap \mathrm{ri}(\mathrm{dom}\, g) \neq \emptyset$ など$)$
- $f(\boldsymbol{x}) \geq g(\boldsymbol{x}) \quad ({}^\forall \boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^m)$

ならば，$f(\boldsymbol{x}) \geq \langle \boldsymbol{p}, \boldsymbol{x} \rangle - \delta \geq g(\boldsymbol{x}) \quad ({}^\forall \boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^m)$

前提条件が
必要な訳





労働市場モデル：設定

- $D = \{d_1, \ldots, d_i, \ldots, d_n\}$：医師の集合
- $H = \{h_1, \ldots, h_j, \ldots, h_m\}$：病院の集合
- $E = D \times H$：医師と病院の組全体

  （多重辺がある状況にも拡張可）

  $E_{d_i} = \{d_i\} \times H$，$E_{h_j} = D \times \{h_j\}$
- $\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^E_+$：割当ベクトル

  $x(d_i, h_j)$：医師 d_i の病院 h_j での勤務時間
- $\boldsymbol{p} \in \mathbf{R}^E$：給与ベクトル

  $p(d_i, h_j)$：医師 d_i の病院 h_j での時間給与

労働市場モデル：評価関数

- $D = \{d_1, \ldots, d_i, \ldots, d_n\}$：医師の集合
- $H = \{h_1, \ldots, h_j, \ldots, h_m\}$：病院の集合
- $E = D \times H$：医師と病院の組全体
  $E_{d_i} = \{d_i\} \times H$，$E_{h_j} = D \times \{h_j\}$

- $f_{d_i} : \mathbf{R}^{E_{d_i}} \to \mathbf{R} \cup \{-\infty\}$：$d_i$ の貨幣価値の評価関数

$$f_D(\boldsymbol{x}) = \sum_{d_i \in D} f_{d_i}(\boldsymbol{x}_{d_i}) \qquad (\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^E)$$

($\boldsymbol{x}_{d_i}$ は $\boldsymbol{x}$ の E_{d_i} への制限)

- $f_{h_j} : \mathbf{R}^{E_{h_j}} \to \mathbf{R} \cup \{-\infty\}$：$h_j$ の貨幣価値の評価関数

$$f_H(\boldsymbol{x}) = \sum_{h_j \in H} f_{h_j}(\boldsymbol{x}_{h_j}) \qquad (\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^E)$$

($\boldsymbol{x}_{h_j}$ は $\boldsymbol{x}$ の E_{h_j} への制限)

労働市場モデル：行動基準

給与ベクトル $\boldsymbol{p} \in \mathbf{R}^E$ に対する行動基準：

医師 d_i の選択：$\max\left\{ f_{d_i}(\boldsymbol{y}) + \langle \boldsymbol{p}_{d_i}, \boldsymbol{y} \rangle \mid \boldsymbol{y} \in \mathbf{R}^{E_{d_i}} \right\}$

(自身の労働の評価額と給与額の和を最大化)

医師全体の選択：$\max\left\{ f_D(\boldsymbol{x}) + \langle \boldsymbol{p}, \boldsymbol{x} \rangle \mid \boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^E \right\}$

病院 h_j の選択：$\max\left\{ f_{h_j}(\boldsymbol{y}) - \langle \boldsymbol{p}_{h_j}, \boldsymbol{y} \rangle \mid \boldsymbol{y} \in \mathbf{R}^{E_{h_j}} \right\}$

(病院の評価額と支払う給与額の差を最大化)

病院全体の選択：$\max\left\{ f_H(\boldsymbol{x}) - \langle \boldsymbol{p}, \boldsymbol{x} \rangle \mid \boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^E \right\}$

ただし，$\langle \boldsymbol{p}, \boldsymbol{x} \rangle = \sum_{e \in E} \boldsymbol{p}(e)\boldsymbol{x}(e)$ (給与総額)

労働市場モデル：均衡

定義

$(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{p}^*) \in \mathbf{R}^E \times \mathbf{R}^E$ が均衡

$$\Updownarrow_{\text{def}}$$

$$\boldsymbol{x}^* \in \arg\max \left\{ f_D(\boldsymbol{x}) + \langle \boldsymbol{p}^*, \boldsymbol{x} \rangle \mid \boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^E \right\}$$

$$\boldsymbol{x}^* \in \arg\max \left\{ f_H(\boldsymbol{x}) - \langle \boldsymbol{p}^*, \boldsymbol{x} \rangle \mid \boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^E \right\}$$

$(\boldsymbol{p}^* \geq \mathbf{0})$

給与ベクトル $\boldsymbol{p}^*$ のもとで，
$\boldsymbol{x}^*$ は医師にとっても病院にとっても最適

労働市場モデル：均衡の存在

定理

f_D, f_H が共に凹関数 ($-f_D$, $-f_H$ が共に凸関数) のとき，(ある種の前提条件の下で) 均衡 $(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{p}^*)$ が存在する

- フェンシェル双対定理から導かれる
- f_D が非増加ならば $\boldsymbol{p}^* \geq \mathbf{0}$
- f_H が非減少ならば $\boldsymbol{p}^* \geq \mathbf{0}$

労働市場モデル：均衡の存在証明

定理

f_D, f_H が共に凹関数 ($-f_D, -f_H$ が共に凸関数) のとき，(ある種の前提条件の下で) 均衡 $(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{p}^*)$ が存在する

$f_1 = -f_D$ とし，$f_D + f_H$ の最大解 $\boldsymbol{x}^*$ の存在とフェンシェル双対定理の前提が成立することが前提条件.

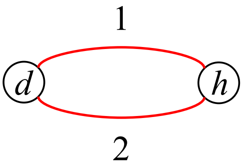
$$
\begin{aligned}
f_D(\boldsymbol{x}^*)+f_H(\boldsymbol{x}^*) &= -(f_1(\boldsymbol{x}^*)-f_H(\boldsymbol{x}^*)) \\
&= -\max_{\boldsymbol{p}}\{f_H^{\circ}(\boldsymbol{p})-f_1^{\bullet}(\boldsymbol{p})\} && \text{（フェンシェル双対定理）} \\
&= -(f_H^{\circ}(\boldsymbol{p}^*) - f_1^{\bullet}(\boldsymbol{p}^*)) && (\boldsymbol{p}^*\text{: 最大解}) \\
&= (-f_D)^{\bullet}(\boldsymbol{p}^*) + (-f_H)^{\bullet}(-\boldsymbol{p}^*) \\
&= \sup_{\boldsymbol{x}}\{f_D(\boldsymbol{x})+\langle \boldsymbol{p}^*, \boldsymbol{x}\rangle\} + \sup_{\boldsymbol{x}}\{f_H(\boldsymbol{x})-\langle \boldsymbol{p}^*, \boldsymbol{x}\rangle\} \\
&\geq f_D(\boldsymbol{x}^*) + f_H(\boldsymbol{x}^*) \quad \text{より}
\end{aligned}
$$

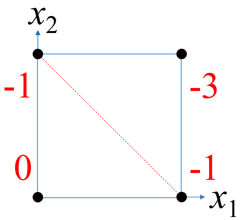
$$\boldsymbol{x}^* \in \arg\max_{\boldsymbol{x}}\{f_D(\boldsymbol{x})+\langle \boldsymbol{p}^*, \boldsymbol{x}\rangle\} \cap \arg\max_{\boldsymbol{x}}\{f_H(\boldsymbol{x})-\langle \boldsymbol{p}^*, \boldsymbol{x}\rangle\} \qquad \square$$

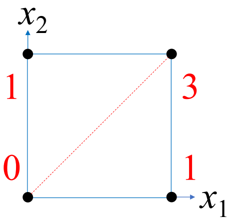
労働市場モデル：例

- $D = \{d\}, \quad H = \{h\}, \quad E = \{1, 2\}$
- $f_d(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} \min\{-2x_1 - 2x_2 + 1, -x_1 - x_2\} & (\boldsymbol{x} \in [0,1]^2) \\ -\infty & (\text{o.w.}) \end{cases}$
- $f_h(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} \min\{2x_1 + x_2, x_1 + 2x_2\} & (\boldsymbol{x} \in [0,1]^2) \\ -\infty & (\text{o.w.}) \end{cases}$

f_d, f_h：凹関数







労働市場モデル：例

$$f_d(\boldsymbol{x}) = \min\{-2x_1 - 2x_2 + 1, -x_1 - x_2\} \qquad (\boldsymbol{x} \in [0,1]^2)$$
$$f_h(\boldsymbol{x}) = \min\{2x_1 + x_2, x_1 + 2x_2\} \qquad (\boldsymbol{x} \in [0,1]^2)$$

$x_1 = x_2 = \frac{1}{2}$， $p_1 = p_2 = \frac{3}{2}$ は均衡

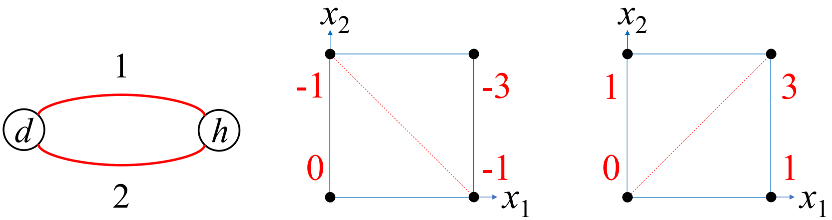
$$\arg\max \left\{ f_d(x_1, x_2) + \frac{3}{2}(x_1 + x_2) \right\}$$
$$= \arg\max_y \{\min\{-y + 1, y\}\}$$
$$\left(y = \frac{x_1 + x_2}{2} \in [0,1] \right)$$
$$= \{(x_1, x_2) \in [0,1]^2 \mid x_1 + x_2 = 1\}$$

$$\arg\max \left\{ f_h(x_1, x_2) - \frac{3}{2}(x_1 + x_2) \right\}$$
$$= \arg\max_z \{\min\{z, -z\}\}$$
$$\left(z = \frac{x_1 - x_2}{2} \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right] \right)$$
$$= \{(x_1, x_2) \in [0,1]^2 \mid x_1 = x_2\}$$

労働市場モデル (離散版)：例

- $D = \{d\}, \qquad H = \{h\}, \qquad E = \{1, 2\}$
- $f_d(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} \min\{-2x_1 - 2x_2 + 1, -x_1 - x_2\} & (\boldsymbol{x} \in \{0, 1\}^2) \\ -\infty & (\text{o.w.}) \end{cases}$
- $f_h(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} \min\{2x_1 + x_2, x_1 + 2x_2\} & (\boldsymbol{x} \in \{0, 1\}^2) \\ -\infty & (\text{o.w.}) \end{cases}$

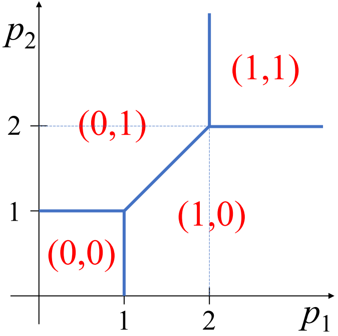
f_d, f_h：凹拡張可能



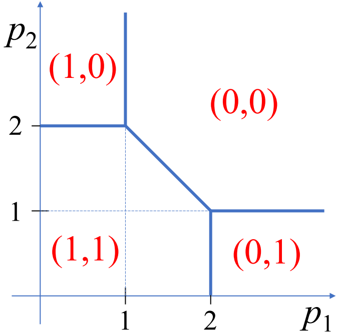
労働市場モデル (離散版)：例

$$f_d(\boldsymbol{x}) = \min\{-2x_1-2x_2+1, -x_1-x_2\} \qquad (\boldsymbol{x} \in \{0,1\}^2)$$
$$f_h(\boldsymbol{x}) = \min\{2x_1+x_2, x_1+2x_2\} \qquad (\boldsymbol{x} \in \{0,1\}^2)$$

$\arg\max\{f_d(\boldsymbol{x}) + \langle \boldsymbol{p}, \boldsymbol{x} \rangle\}$



$\arg\max\{f_h(\boldsymbol{x}) - \langle \boldsymbol{p}, \boldsymbol{x} \rangle\}$

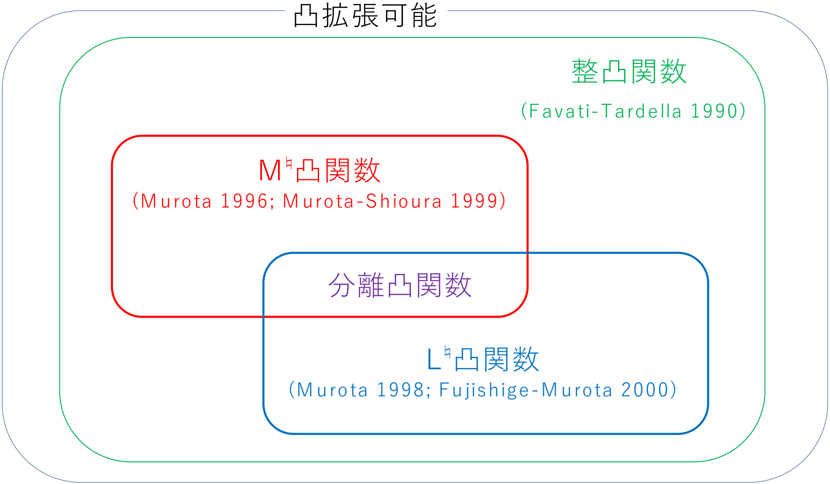


均衡は存在しない (“離散” フェンシェル双対性が不成立)

目次

離散凸関数

$f : \mathbf{Z}^m \to \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$



分離関数: $\Phi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \varphi_1(x_1) + \varphi_2(x_2) + \cdots + \varphi_n(x_n)$

M$^\natural$ 凸関数

定義 (Murota-Shioura 1999)

$f : \mathbf{Z}^m \to \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$: M$^\natural$ 凸関数

$$\Updownarrow_{\mathrm{def}}$$

$^\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathrm{dom}\, f$, $^\forall u \in \mathrm{supp}^+(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y})$,
$^\exists v \in \{0\} \cup \mathrm{supp}^-(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y})$,

$$f(\boldsymbol{x}) + f(\boldsymbol{y}) \geq f(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{e}_u + \boldsymbol{e}_v) + f(\boldsymbol{y} + \boldsymbol{e}_u - \boldsymbol{e}_v)$$

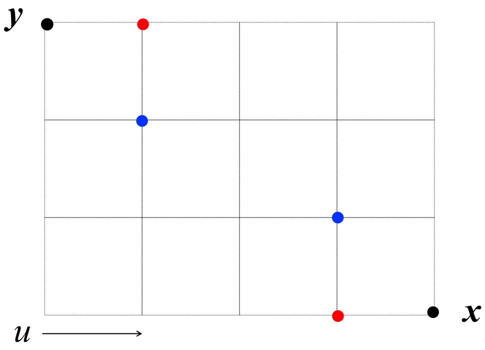
ただし

$$\begin{aligned}
\mathrm{dom}\, f &= \{\boldsymbol{x} \in \mathbf{Z}^m \mid f(\boldsymbol{x}) \in \mathbf{R}\} \\
\mathrm{supp}^+(\boldsymbol{z}) &= \{v \in \{1, \ldots, m\} \mid z(v) > 0\} \\
\mathrm{supp}^-(\boldsymbol{z}) &= \{v \in \{1, \ldots, m\} \mid z(v) < 0\} \\
\boldsymbol{e}_u(i) &= \begin{cases} 1 & (i = u) \\ 0 & (i \neq u) \end{cases} \quad (i \in V) \\
\boldsymbol{e}_0 &= \mathbf{0}
\end{aligned}$$

M$^\natural$ 凸関数

$^\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathrm{dom}\, f$, $^\forall u \in \mathrm{supp}^+(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y})$,
$^\exists v \in \{0\} \cup \mathrm{supp}^-(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y})$,

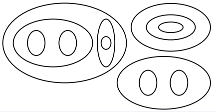
$$f(\boldsymbol{x}) + f(\boldsymbol{y}) \geq f(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{e}_u + \boldsymbol{e}_v) + f(\boldsymbol{y} + \boldsymbol{e}_u - \boldsymbol{e}_v)$$



層型凸関数：M$^\natural$ 凸関数の例

定義

$\mathcal{T} \subseteq 2^V$: 層族 $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ ${}^\forall X, Y \in \mathcal{T}$,
$X \cap Y = \emptyset$ or $X \subseteq Y$ or $Y \subseteq X$



命題 (Danilov-Koshevoy-Murota 1998, 2001)

$\mathcal{T}$: 層族，　$Y \in \mathcal{T}$ に対し $f_Y : \mathbf{R} \to \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$: 凸関数

$$f(\boldsymbol{x}) = \sum_{Y \in \mathcal{T}} f_Y\left(\sum_{i \in Y} x(i)\right) \qquad (\boldsymbol{x} \in \mathbf{Z}^V)$$

は層型凸関数と呼ばれ，これは M$^\natural$ 凸関数となる．

層型凹関数の学科分けへの適用　[赤堀-関口-T. 2017]

L$^\natural$ 凸関数

定義 (Fujishige-Murota 2000)

$g : \mathbf{Z}^m \to \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$: L$^\natural$ 凸関数

$$\Updownarrow_{\mathrm{def}}$$

$$g(\boldsymbol{p}) + g(\boldsymbol{q}) \geq g\left(\left\lceil \frac{\boldsymbol{p}+\boldsymbol{q}}{2} \right\rceil\right) + g\left(\left\lfloor \frac{\boldsymbol{p}+\boldsymbol{q}}{2} \right\rfloor\right) \quad ({}^\forall \boldsymbol{p}, \boldsymbol{q} \in \mathbf{Z}^m)$$

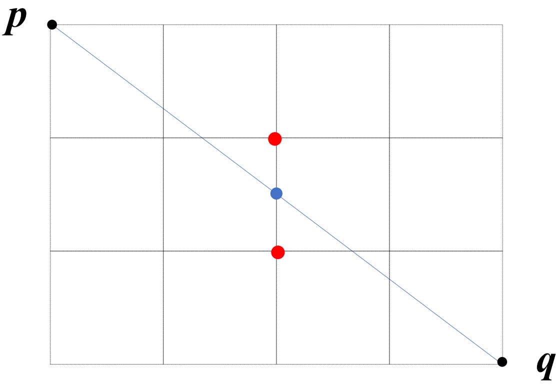
$\left\lceil \dfrac{\boldsymbol{p}+\boldsymbol{q}}{2} \right\rceil$ は成分ごとの小数点以下切上げ

$\left\lfloor \dfrac{\boldsymbol{p}+\boldsymbol{q}}{2} \right\rfloor$ は成分ごとの小数点以下切捨て

L 凸関数のという概念は Murota 1998 による．

L♮ 凸関数

$$g(p) + g(q) \geq g\left(\left\lceil \frac{p+q}{2} \right\rceil\right) + g\left(\left\lfloor \frac{p+q}{2} \right\rfloor\right) \quad ({}^{\forall}p, q \in \mathbf{Z}^m)$$



L$^\natural$ 凸関数の性質

命題

$g_1, g_2 : \mathbf{Z}^m \to \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$: L$^\natural$ 凸 $\Rightarrow$ $g_1 + g_2$: L$^\natural$ 凸関数

系

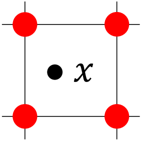
$T_1, T_2 \subseteq \mathbf{Z}^m$: L$^\natural$ 凸集合 $\Rightarrow$ $T_1 \cap T_2$: L$^\natural$ 凸集合

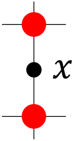
- 関数の M$^\natural$ 凸性は和について閉じない
- 集合の M$^\natural$ 凸性は交わりについて閉じない

整凸関数

整数近傍：$\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^m$ に対し

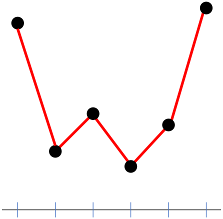
$$N(\boldsymbol{x}) = \{\boldsymbol{z} \in \mathbf{Z}^m \mid \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{z}\|_\infty < 1\}$$
$$= \{\boldsymbol{z} \in \mathbf{Z}^m \mid \lfloor \boldsymbol{x} \rfloor \leq \boldsymbol{z} \leq \lceil \boldsymbol{x} \rceil\}$$





局所凸拡張：$f : \mathbf{Z}^m \to \mathbf{Z} \cup \{+\infty\}$ に対し

$$\tilde{f}(\boldsymbol{x}) = \sup_{\boldsymbol{p},\alpha}\{\langle \boldsymbol{p}, \boldsymbol{x}\rangle + \alpha \mid \langle \boldsymbol{p}, \boldsymbol{z}\rangle + \alpha \leq f(\boldsymbol{z}) \quad (\forall \boldsymbol{z} \in N(\boldsymbol{x}))\}$$



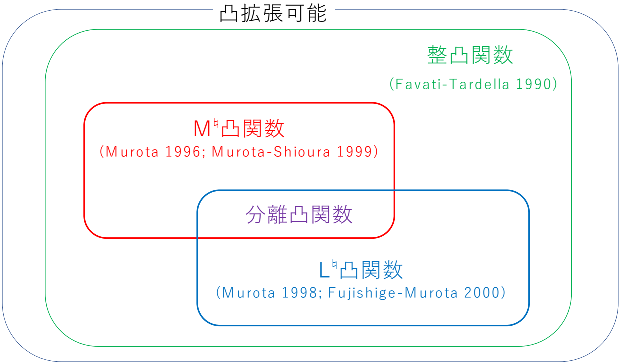
定義 (Favati-Tardella 1990)

$f : \mathbf{Z}^m \to \mathbf{Z} \cup \{+\infty\}$ が整凸関数 $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\tilde{f}$ が凸関数

離散凸性の関係

命題

- {分離凸} $\subset$ {M$^\natural$ 凸} $\subset$ {整凸} $\subset$ {凸拡張可能}
- {分離凸} $\subset$ {L$^\natural$ 凸} $\subset$ {整凸} $\subset$ {凸拡張可能}
- {M$^\natural$ 凸} $\cap$ {L$^\natural$ 凸} = {分離凸}



整凸関数の性質（概説）

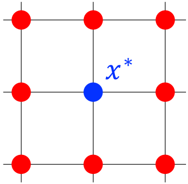
- f：整数値整凸関数 $\Rightarrow$ $(f^{\bullet})^{\bullet} = f$
- $\{0,1\}^m$ 上の任意の関数は整凸関数 $\longrightarrow$
  - ほとんどの組合せ最適化問題は整凸関数最小化
  - 計算量の観点からは良い対象とは言えない
- 局所的な最小性基準が存在 $\longrightarrow$
  - 最急降下法が適用可
  - 多項式時間性を無視すれば良いクラス
- ある程度良い性質をもつ最も広い離散凸クラス (?)
  - 良いサブクラスも存在

定理 (Favati-Tardella 1990)

$$x^* \in \mathbf{Z}^m \text{ が整凸関数 } f \text{ の最小点}$$

$$\Updownarrow$$

$$f(x^*) \le f(z) \quad (\forall z \in \mathbf{Z}^m : \|x^* - z\|_\infty \le 1)$$



M$^\natural$ 凸関数の最小性規準

定理 (Murota 1996)

M$^\natural$ 凸関数 $f : \mathbf{Z}^V \to \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$，$\boldsymbol{x} \in \mathrm{dom}\, f$ に対し

$$f(\boldsymbol{x}) \leq f(\boldsymbol{y}) \ ({}^\forall \boldsymbol{y} \in \mathbf{Z}^V) \iff \begin{cases} f(\boldsymbol{x}) \leq f(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{e}_u + \boldsymbol{e}_v) \ ({}^\forall u, v \in V) \\ f(\boldsymbol{x}) \leq f(\boldsymbol{x} \pm \boldsymbol{e}_u) \ ({}^\forall u \in V) \end{cases}$$

M$^\natural$ 凸関数 f と $\boldsymbol{x} \in \mathbf{Z}^V$ に対して，$\boldsymbol{x}$ の f に関する最小性は $O(|V|^2)$ 回の関数値評価で判定できる．

L$^\natural$ 凸関数の最小性規準

定理 (Murota 2000)

L$^\natural$ 凸関数 $g : \mathbf{Z}^V \to \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$，$\boldsymbol{p} \in \mathrm{dom}\, g$ に対し

$g(\boldsymbol{p}) \le g(\boldsymbol{q})\ ({}^\forall \boldsymbol{q} \in \mathbf{Z}^V) \Leftrightarrow g(\boldsymbol{p}) \le g(\boldsymbol{p} \pm \boldsymbol{e}_Y)\ ({}^\forall Y \subseteq V)$

L$^\natural$ 凸関数 g と $\boldsymbol{p} \in \mathbf{Z}^V$ に対して，

$$\rho_p^+(Y) = g(\boldsymbol{p} + \boldsymbol{e}_Y) - g(\boldsymbol{p}) \quad (Y \subseteq V)$$
$$\rho_p^-(Y) = g(\boldsymbol{p} - \boldsymbol{e}_Y) - g(\boldsymbol{p}) \quad (Y \subseteq V)$$

は劣モジュラ関数となる．劣モジュラ関数最小化法

Grötschel, Lovász, Schrijver 1988; 楕円体法

Schrijver 2000: $O(n^8\gamma + n^9)$-algo.

Iwata, Fleischer, Fujishige 2001: $O(n^7\gamma \log n)$-algo.

Orlin 2009: $O(n^5\gamma + n^6)$-algo.

($n = |V|$, $\gamma : g$ の評価時間)

離散共役関数

$f : \mathbf{Z}^m \to \mathbf{Z} \cup \{+\infty\}$

定義

$f^\bullet : \mathbf{Z}^m \to \mathbf{Z} \cup \{+\infty\}$: f の離散凸共役関数

$\Updownarrow_{\mathrm{def}}$

$$f^\bullet(\boldsymbol{p}) = \sup\{\langle \boldsymbol{p}, \boldsymbol{x} \rangle - f(\boldsymbol{x}) \mid \boldsymbol{x} \in \mathbf{Z}^m\} \quad (\boldsymbol{p} \in \mathbf{Z}^m)$$

$g : \mathbf{Z}^m \to \mathbf{Z} \cup \{-\infty\}$

定義

$g^\circ : \mathbf{Z}^m \to \mathbf{Z} \cup \{-\infty\}$: g の離散凹共役関数

$\Updownarrow_{\mathrm{def}}$

$$g^\circ(\boldsymbol{p}) = \inf\{\langle \boldsymbol{p}, \boldsymbol{x} \rangle - g(\boldsymbol{x}) \mid \boldsymbol{x} \in \mathbf{Z}^m\} \quad (\boldsymbol{p} \in \mathbf{Z}^m)$$

離散共役関数

定理 (Murota 1998)

1. $f : \mathbf{Z}^m \to \mathbf{Z} \cup \{+\infty\}$ が (整数値)M$^\natural$ 凸関数ならば，
$f^\bullet$ は L$^\natural$ 凸関数となり，$(f^\bullet)^\bullet = f$.
2. $g : \mathbf{Z}^m \to \mathbf{Z} \cup \{+\infty\}$ が (整数値)L$^\natural$ 凸関数ならば，
$g^\bullet$ は M$^\natural$ 凸関数となり，$(g^\bullet)^\bullet = g$.

離散凸共役関数

$$f^\bullet(p) = \sup\{\langle p, x\rangle - f(x) \mid x \in \mathbf{Z}^m\} \quad (p \in \mathbf{Z}^m)$$

M 分離定理

定理 (M 分離定理; Murota 1996,1998)

- $f : \mathbf{Z}^m \to \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$ M$^\natural$ 凸関数
- $h : \mathbf{Z}^m \to \mathbf{R} \cup \{-\infty\}$ M$^\natural$ 凹関数
- $\mathrm{dom}\, f \cap \mathrm{dom}\, h \neq \emptyset$ または $\mathrm{dom}\, f^\bullet \cap \mathrm{dom}\, h^\circ \neq \emptyset$
- $f(\boldsymbol{x}) \geq h(\boldsymbol{x}) \quad ({}^\forall \boldsymbol{x} \in \mathbf{Z}^m)$

ならば，$\boldsymbol{p} \in \mathbf{R}^m$ と $\delta \in \mathbf{R}$ が存在し

$$f(\boldsymbol{x}) \geq \langle \boldsymbol{p}, \boldsymbol{x} \rangle - \delta \geq h(\boldsymbol{x}) \quad ({}^\forall \boldsymbol{x} \in \mathbf{Z}^m)$$

さらに f, h が整数値をとるならば，$\boldsymbol{p} \in \mathbf{Z}^m$，$\delta \in \mathbf{Z}$

L 分離定理

定理 (L 分離定理; Murota 1998)

- $g : \mathbf{Z}^m \to \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$ L$^\natural$ 凸関数
- $k : \mathbf{Z}^m \to \mathbf{R} \cup \{-\infty\}$ L$^\natural$ 凹関数
- $\mathrm{dom}\, g \cap \mathrm{dom}\, k \neq \emptyset$ または $\mathrm{dom}\, g^\bullet \cap \mathrm{dom}\, k^\circ \neq \emptyset$
- $g(\boldsymbol{p}) \geq k(\boldsymbol{p}) \quad ({}^\forall \boldsymbol{p} \in \mathbf{Z}^m)$

ならば，$\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^m$ と $\delta \in \mathbf{R}$ が存在し

$$g(\boldsymbol{p}) \geq \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{p} \rangle - \delta \geq k(\boldsymbol{p}) \quad ({}^\forall \boldsymbol{p} \in \mathbf{Z}^m)$$

さらに g, k が整数値をとるならば，$\boldsymbol{x} \in \mathbf{Z}^m$ と $\delta \in \mathbf{Z}$

M 凸交叉定理

定理 (Murota 1996)

- $f_1, f_2 : \mathbf{Z}^m \to \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$：M$^\natural$ 凸関数
- $\boldsymbol{x}^* \in \mathrm{dom}\, f_1 \cap \mathrm{dom}\, f_2$

$$f_1(\boldsymbol{x}^*) + f_2(\boldsymbol{x}^*) \leq f_1(\boldsymbol{x}) + f_2(\boldsymbol{x}) \qquad ({}^\forall \boldsymbol{x} \in \mathbf{Z}^m)$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{aligned} {}^\exists \boldsymbol{p}^* \in \mathbf{R}^m \text{:}\ & f_1[-\boldsymbol{p}^*](\boldsymbol{x}^*) \leq f_1[-\boldsymbol{p}^*](\boldsymbol{x}) \qquad ({}^\forall \boldsymbol{x} \in \mathbf{Z}^m) \\ & f_2[+\boldsymbol{p}^*](\boldsymbol{x}^*) \leq f_2[+\boldsymbol{p}^*](\boldsymbol{x}) \qquad ({}^\forall \boldsymbol{x} \in \mathbf{Z}^m) \end{aligned}$$

上記の $\boldsymbol{p}^*$ に対して　　$(f_1[-\boldsymbol{p}^*](\boldsymbol{x}^*) = f_1(\boldsymbol{x}^*) - \langle \boldsymbol{p}^*, \boldsymbol{x}^* \rangle)$

$$\arg\min(f_1 + f_2) = \arg\min f_1[-\boldsymbol{p}^*] \cap \arg\min f_2[+\boldsymbol{p}^*]$$

さらに $f_1, f_2 : \mathbf{Z}^m \to \mathbf{Z} \cup \{+\infty\}$ ならば $\boldsymbol{p}^* \in \mathbf{Z}^m$ とできる

目次

$\mathrm{M}^\natural$ 凹関数を用いたモデル

$\mathrm{M}^\natural$ 凹統合モデル
(Fujishige-T. 2007)

$\nearrow$ $\nwarrow$

$\mathrm{M}^\natural$ 凹割当モデル
(Murota 1996 等)

$\mathrm{M}^\natural$ 凹安定結婚モデル
(Eguchi-Fujishige-T. 2003)

$\uparrow$ $\uparrow$

割当モデル
(Shapley-Shubik 1972)

安定結婚モデル
(Gale-Shapley 1962)

割当モデル

- P：男性集合;　Q：女性集合;　$E = P \times Q$
- $c_{ij} \in \mathbf{R}_+^E$：男性 i と女性 j が組んだ時の利益

総利益を最大にするように仕事を割り振る

$$
\begin{array}{lll}
\text{最大化} & \displaystyle\sum_{(i,j)\in E} c_{ij}x_{ij} & \\
\text{条件} & \displaystyle\sum_{j\in Q} x_{ij} \leq 1 & (i\in P) \\
 & \displaystyle\sum_{i\in P} x_{ij} \leq 1 & (j\in Q) \\
 & x_{ij} \geq 0 & ((i,j)\in E)
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lll}
\text{最小化} & \displaystyle\sum_{i\in P} y_i + \sum_{j\in Q} z_j & \\
\text{条件} & y_i \geq 0 & (i\in P) \\
 & z_j \geq 0 & (j\in Q) \\
 & y_i + z_j \geq c_{ij} & ((i,j)\in E)
\end{array}
$$

割当モデル

最大化 $\displaystyle\sum_{(i,j)\in E} c_{ij}x_{ij}$	最小化 $\displaystyle\sum_{i\in P} y_i + \sum_{j\in Q} z_j$
条件 $\displaystyle\sum_{j\in Q} x_{ij} \leq 1 \quad (i\in P)$	条件 $y_i \geq 0 \quad (i\in P)$
$\displaystyle\sum_{i\in P} x_{ij} \leq 1 \quad (j\in Q)$	$z_j \geq 0 \quad (j\in Q)$
$x_{ij} \geq 0 \quad ((i,j)\in E)$	$y_i + z_j \geq c_{ij} \quad ((i,j)\in E)$

- 主問題は 0-1 最適解 x^*，双対問題は最適解 (y^*, z^*)
- $M^* = \{(i,j) \in E \mid x^*_{ij} = 1\} \Longrightarrow$ マッチング
- y^*_i を男性 i の利得，z^*_j を女性 j の利得
  $\left(\sum_{j\in Q} x^*_{ij} = 0 \Rightarrow y^*_i = 0\right)$, $\left(\sum_{i\in P} x^*_{ij} = 0 \Rightarrow z^*_j = 0\right)$
- $y^*_i + z^*_j = c_{ij} \quad (\forall (i,j) \in M^*) \Longrightarrow$ 利益の分配
- $(y^*, z^*) \geq \mathbf{0}; \quad y^*_i + z^*_j \geq c_{ij} \quad (\forall (i,j) \in E) \Longrightarrow$ 安定性

労働市場モデル (離散版)：設定

- $D = \{d_1, \ldots, d_i, \ldots, d_n\}$：医師の集合
- $H = \{h_1, \ldots, h_j, \ldots, h_m\}$：病院の集合
- $E = D \times H$：医師と病院の組全体

  （多重辺がある状況にも拡張可）

  $E_{d_i} = \{d_i\} \times H$，$E_{h_j} = D \times \{h_j\}$
- $\boldsymbol{x} \in \mathbf{Z}_+^E$：割当ベクトル（割当が離散的）

  $x(d_i, h_j)$：医師 d_i の病院 h_j での勤務時間
- $\boldsymbol{p} \in \mathbf{R}^E$：給与ベクトル

  $p(d_i, h_j)$：医師 d_i の病院 h_j での時間給与

労働市場モデル (離散版)：評価関数

- $D = \{d_1, \ldots, d_i, \ldots, d_n\}$：医師の集合
- $H = \{h_1, \ldots, h_j, \ldots, h_m\}$：病院の集合
- $E = D \times H$：医師と病院の組全体

  $E_{d_i} = \{d_i\} \times H$，$E_{h_j} = D \times \{h_j\}$

- $f_{d_i} : \mathbf{Z}^{E_{d_i}} \to \mathbf{R} \cup \{-\infty\}$：$d_i$ の貨幣価値の評価関数

$$f_D(\boldsymbol{x}) = \sum_{d_i \in D} f_{d_i}(\boldsymbol{x}_{d_i}) \qquad (\boldsymbol{x} \in \mathbf{Z}^E)$$

($\boldsymbol{x}_{d_i}$ は $\boldsymbol{x}$ の E_{d_i} への制限)

- $f_{h_j} : \mathbf{Z}^{E_{h_j}} \to \mathbf{R} \cup \{-\infty\}$：$h_j$ の貨幣価値の評価関数

$$f_H(\boldsymbol{x}) = \sum_{h_j \in H} f_{h_j}(\boldsymbol{x}_{h_j}) \qquad (\boldsymbol{x} \in \mathbf{Z}^E)$$

($\boldsymbol{x}_{h_j}$ は $\boldsymbol{x}$ の E_{h_j} への制限)

労働市場モデル (離散版)：行動基準

給与ベクトル $\boldsymbol{p} \in \mathbf{R}^E$ に対する行動基準：

医師 d_i の選択：$\max \left\{ f_{d_i}(\boldsymbol{y}) + \langle \boldsymbol{p}_{d_i}, \boldsymbol{y} \rangle \mid \boldsymbol{y} \in \mathbf{Z}^{E_{d_i}} \right\}$

(自身の労働の評価額と給与額の和を最大化)

医師全体の選択：$\max \left\{ f_D(\boldsymbol{x}) + \langle \boldsymbol{p}, \boldsymbol{x} \rangle \mid \boldsymbol{x} \in \mathbf{Z}^E \right\}$

病院 h_j の選択：$\max \left\{ f_{h_j}(\boldsymbol{y}) - \langle \boldsymbol{p}_{h_j}, \boldsymbol{y} \rangle \mid \boldsymbol{y} \in \mathbf{Z}^{E_{h_j}} \right\}$

(病院の評価額と支払う給与額の差を最大化)

病院全体の選択：$\max \left\{ f_H(\boldsymbol{x}) - \langle \boldsymbol{p}, \boldsymbol{x} \rangle \mid \boldsymbol{x} \in \mathbf{Z}^E \right\}$

ただし，$\langle \boldsymbol{p}, \boldsymbol{x} \rangle = \sum_{e \in E} \boldsymbol{p}(e)\boldsymbol{x}(e)$ (給与総額)

労働市場モデル (離散版)：均衡

定義

$(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{p}^*) \in \mathbf{Z}^E \times \mathbf{R}^E$ が均衡

$$\Updownarrow_{\text{def}}$$

$$\boldsymbol{x}^* \in \arg\max \left\{ f_D(\boldsymbol{x}) + \langle \boldsymbol{p}^*, \boldsymbol{x} \rangle \mid \boldsymbol{x} \in \mathbf{Z}^E \right\}$$

$$\boldsymbol{x}^* \in \arg\max \left\{ f_H(\boldsymbol{x}) - \langle \boldsymbol{p}^*, \boldsymbol{x} \rangle \mid \boldsymbol{x} \in \mathbf{Z}^E \right\}$$

$(\boldsymbol{p}^* \geq \mathbf{0})$

給与ベクトル $\boldsymbol{p}^*$ のもとで，
$\boldsymbol{x}^*$ は医師にとっても病院にとっても最適

M$^\natural$ 凹割当モデル

定理 (Murota 1996; Danilov-Koshevoy-Murota 2001; Murota-T. 2003)

- 各 $f_{d_i} : \mathbf{Z}^{E_{d_i}} \to \mathbf{R} \cup \{-\infty\}$：M$^\natural$ 凹関数
- 各 $f_{h_j} : \mathbf{Z}^{E_{h_j}} \to \mathbf{R} \cup \{-\infty\}$：M$^\natural$ 凹関数

(1) $f_D, f_H : \mathbf{Z}^E \to \mathbf{R} \cup \{-\infty\}$ は M$^\natural$ 凹関数

(2) $\arg\max\{f_D + f_H\} \neq \emptyset$ ならば，$^\exists \boldsymbol{x}^* \in \mathbf{Z}^E$, $^\exists \boldsymbol{p}^* \in \mathbf{R}^E$:

$$\boldsymbol{x}^* \in \arg\max\{f_D(\boldsymbol{x}) + \langle \boldsymbol{p}^*, \boldsymbol{x}\rangle \mid \boldsymbol{x} \in \mathbf{Z}^E\}$$
$$\boldsymbol{x}^* \in \arg\max\{f_H(\boldsymbol{x}) - \langle \boldsymbol{p}^*, \boldsymbol{x}\rangle \mid \boldsymbol{x} \in \mathbf{Z}^E\}$$

(3) f_D が単調非増加 ($\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathrm{dom}\, f_D, \boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{y} \Rightarrow f_D(\boldsymbol{x}) \geq f_D(\boldsymbol{y})$) のとき，$\boldsymbol{x}^* - \boldsymbol{e}_{(i,j)} \in \mathrm{dom}\, f_D \Rightarrow p^*(i,j) \geq 0$

(4) f_H が単調非減少 ($\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathrm{dom}\, f_H, \boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{y} \Rightarrow f_H(\boldsymbol{x}) \leq f_H(\boldsymbol{y})$) のとき，$\boldsymbol{x}^* + \boldsymbol{e}_{(i,j)} \in \mathrm{dom}\, f_H \Rightarrow p^*(i,j) \geq 0$

M 凹交叉定理

定理 (Murota 1996)

- $f_D, f_H : \mathbf{Z}^E \to \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$：M$^\natural$ 凹関数
- $\boldsymbol{x}^* \in \mathrm{dom}\, f_D \cap \mathrm{dom}\, f_H$

$$f_D(\boldsymbol{x}^*) + f_H(\boldsymbol{x}^*) \geq f_D(\boldsymbol{x}) + f_H(\boldsymbol{x}) \qquad ({}^\forall \boldsymbol{x} \in \mathbf{Z}^E)$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{aligned} {}^\exists \boldsymbol{p}^* \in \mathbf{R}^E\colon\ & f_D[+\boldsymbol{p}^*](\boldsymbol{x}^*) \geq f_D[+\boldsymbol{p}^*](\boldsymbol{x}) \qquad ({}^\forall \boldsymbol{x} \in \mathbf{Z}^E) \\ & f_H[-\boldsymbol{p}^*](\boldsymbol{x}^*) \geq f_H[-\boldsymbol{p}^*](\boldsymbol{x}) \qquad ({}^\forall \boldsymbol{x} \in \mathbf{Z}^E) \end{aligned}$$

上記の $\boldsymbol{p}^*$ に対して $\quad (f_D[+\boldsymbol{p}^*](\boldsymbol{x}^*) = f_D(\boldsymbol{x}^*) + \langle \boldsymbol{p}^*, \boldsymbol{x}^* \rangle)$

$$\arg\max(f_D + f_H) = \arg\max f_D[+\boldsymbol{p}^*] \cap \arg\max f_H[-\boldsymbol{p}^*]$$

さらに $f_D, f_H : \mathbf{Z}^E \to \mathbf{Z} \cup \{+\infty\}$ ならば $\boldsymbol{p}^* \in \mathbf{Z}^E$ とできる

定理の証明

(1) f_D, f_H は複数の M$^\natural$ 凹関数の和ではない．例えば，
$i_1 \neq i_2 \Rightarrow E_{d_{i_1}} \cap E_{d_{i_2}} = \emptyset$ であることに注意．

(2) $\boldsymbol{x}^* \in \arg\max\{f_D + f_H\}$ を任意に選ぶと M 凹交叉定理より，

$$
{}^\exists \boldsymbol{p}^* \in \mathbf{R}^E : \quad
\begin{aligned}
\boldsymbol{x}^* &\in \arg\max\{f_D(\boldsymbol{x}) + \langle \boldsymbol{p}^*, \boldsymbol{x}\rangle \mid \boldsymbol{x} \in \mathbf{Z}^E\} \\
\boldsymbol{x}^* &\in \arg\max\{f_H(\boldsymbol{x}) - \langle \boldsymbol{p}^*, \boldsymbol{x}\rangle \mid \boldsymbol{x} \in \mathbf{Z}^E\}
\end{aligned}
$$

(3) $\boldsymbol{x}^* - \boldsymbol{e}_i \in \mathrm{dom}\, f_D$ とすると

$$f_D(\boldsymbol{x}^*) + \langle \boldsymbol{p}^*, \boldsymbol{x}^*\rangle \geq f_D(\boldsymbol{x}^* - \boldsymbol{e}_{(i,j)}) + \langle \boldsymbol{p}^*, \boldsymbol{x}^* - \boldsymbol{e}_{(i,j)}\rangle$$

より， $p^*(i, j) \geq f_D(\boldsymbol{x}^* - \boldsymbol{e}_{(i,j)}) - f_D(\boldsymbol{x}^*) \geq 0.$

(4) $\boldsymbol{x}^* + \boldsymbol{e}_i \in \mathrm{dom}\, f_H$ とすると

$$f_H(\boldsymbol{x}^*) - \langle \boldsymbol{p}^*, \boldsymbol{x}^*\rangle \geq f_H(\boldsymbol{x}^* + \boldsymbol{e}_{(i,j)}) - \langle \boldsymbol{p}^*, \boldsymbol{x}^* + \boldsymbol{e}_{(i,j)}\rangle$$

より， $p^*(i, j) \geq f_H(\boldsymbol{x}^* + \boldsymbol{e}_{(i,j)}) - f_H(\boldsymbol{x}^*) \geq 0.$ □

M$^\natural$ 凹性の経済学的意味：粗代替性+α

定理 (Murota-Shioura-Yang 2013)

$f : \mathbf{Z}^E \to \mathbf{R} \cup \{-\infty\}$ が凹拡張可能かつ $\mathrm{dom}\, f$ が有界
以下の主張は同値

(1) f は M$^\natural$ 凹関数

(2) $^\forall \boldsymbol{p}, \boldsymbol{q} \in \mathbf{R}^E$ $(\boldsymbol{p} \leq \boldsymbol{q})$, $^\forall \boldsymbol{x}^* \in \arg\max\{f(\boldsymbol{z}) - \langle \boldsymbol{p}, \boldsymbol{z} \rangle\}$,
$^\exists \boldsymbol{y}^* \in \arg\max\{f(\boldsymbol{z}) - \langle \boldsymbol{q}, \boldsymbol{z} \rangle\}$:

$$y^*(i) \geq x^*(i) \quad ({}^\forall i \in E \text{ with } q(i) = p(i)),$$

$$\sum_{i \in E} y^*(i) \leq \sum_{i \in E} x^*(i)$$

Fujishige-Yang 2003; Danilov-Koshevoy-Lang 2003,
Murota-T. 2003

粗代替性の解釈

(2) $^{\forall}\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q} \in \mathbf{R}^E$ $(\boldsymbol{p} \leq \boldsymbol{q})$, $^{\forall}\boldsymbol{x}^* \in \arg\max\{f(\boldsymbol{z}) - \langle \boldsymbol{p}, \boldsymbol{z} \rangle\}$,
$^{\exists}\boldsymbol{y}^* \in \arg\max\{f(\boldsymbol{z}) - \langle \boldsymbol{q}, \boldsymbol{z} \rangle\}$:

$$y^*(i) \geq x^*(i) \quad (^{\forall}i \in E \text{ with } q(i) = p(i)),$$

$$\sum_{i \in E} y^*(i) \leq \sum_{i \in E} x^*(i)$$

E：不可分財の集合，　$\boldsymbol{x} \in \mathbf{Z}^E$：不可分財の消費ベクトル
$\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}$：価格ベクトル，　$f(\boldsymbol{x})$：$\boldsymbol{x}$ に対する貨幣価値の評価

$\boldsymbol{x}^*$：価格ベクトル $\boldsymbol{p}$ に対する最適消費ベクトル，
$\boldsymbol{y}^*$：価格が $\boldsymbol{q}$ に上昇したときの最適消費ベクトル

- 価格据置きの財の消費個数は減らず
- 総消費数は増えない

M$^\natural$ 凹性の経済学的意味：代替性

命題 (Eguchi-Fujishige-T. 2003)

M$^\natural$ 凹関数 $f : \mathbf{Z}^E \to \mathbf{R} \cup \{-\infty\}$ は以下の性質を満たす

(Sc) ${}^\forall \boldsymbol{z}_1, \boldsymbol{z}_2 \in \mathbf{Z}^E \ (\boldsymbol{z}_1 \leq \boldsymbol{z}_2)$,
${}^\forall \boldsymbol{x}_1 \in \arg\max\{f(\boldsymbol{y}) \mid \boldsymbol{y} \leq \boldsymbol{z}_1\}$,
${}^\exists \boldsymbol{x}_2 \in \arg\max\{f(\boldsymbol{y}) \mid \boldsymbol{y} \leq \boldsymbol{z}_2\}$: $\boldsymbol{z}_1 \wedge \boldsymbol{x}_2 \leq \boldsymbol{x}_1$

E：不可分財の集合，　$\boldsymbol{x} \in \mathbf{Z}^E$：不可分財の消費ベクトル
$\boldsymbol{z}_1, \boldsymbol{z}_2$：消費数の上限，$f(\boldsymbol{x})$：$\boldsymbol{x}$ に対する貨幣価値の評価

$\boldsymbol{x}_1$：$\boldsymbol{z}_1$ まで消費できるときの最適消費ベクトル，
$\boldsymbol{x}_2$：上限が $\boldsymbol{z}_2$ に増えたときの最適消費ベクトル

- $x_1(i) < z_1(i) \Rightarrow x_2(i) \leq x_1(i)$
  余る財は，上限が増えても消費数は増えない

M$^\natural$ 凹性の経済学的意味：代替性

命題 (Eguchi-Fujishige-T. 2003)

M$^\natural$ 凹関数 $f : \mathbf{Z}^E \to \mathbf{R} \cup \{-\infty\}$ は以下の性質を満たす

(Sc) $^\forall \boldsymbol{z}_1, \boldsymbol{z}_2 \in \mathbf{Z}^E$ $(\boldsymbol{z}_1 \leq \boldsymbol{z}_2)$,
$^\forall \boldsymbol{x}_1 \in \arg\max\{f(\boldsymbol{y}) \mid \boldsymbol{y} \leq \boldsymbol{z}_1\}$,
$^\exists \boldsymbol{x}_2 \in \arg\max\{f(\boldsymbol{y}) \mid \boldsymbol{y} \leq \boldsymbol{z}_2\}$: $\boldsymbol{z}_1 \wedge \boldsymbol{x}_2 \leq \boldsymbol{x}_1$

定理 (Farooq-T. 2004; Farooq-Shioura 2005)

$f : \mathbf{Z}^E \to \mathbf{R} \cup \{-\infty\}$ に対し $\mathrm{dom}\, f$ が有界なとき
f ：M$^\natural$ 凹 $\Leftrightarrow$ $^\forall \boldsymbol{p} \in \mathbf{R}^E$, $f[-\boldsymbol{p}]$ satisfies (Sc)

$$f[-\boldsymbol{p}](\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}) - \langle \boldsymbol{p}, \boldsymbol{x} \rangle$$

M$^\natural$ 凹安定結婚モデル：設定

- $D = \{d_1, \ldots, d_i, \ldots, d_n\}$：医師の集合
- $H = \{h_1, \ldots, h_j, \ldots, h_m\}$：病院の集合
- $E = D \times H$：医師と病院の組全体

  $E_{d_i} = \{d_i\} \times H$，$E_{h_j} = D \times \{h_j\}$
- $\boldsymbol{x} \in \mathbf{Z}_+^E$：割当ベクトル
- $f_{d_i} : \mathbf{Z}_+^{E_{d_i}} \to \mathbf{R} \cup \{-\infty\}$：$d_i$ の評価関数
- $f_{h_j} : \mathbf{Z}_+^{E_{h_j}} \to \mathbf{R} \cup \{-\infty\}$：$h_j$ の評価関数

仮定

$\mathrm{dom}\, f_{d_i}, \mathrm{dom}\, f_{h_j}$ は $\mathbf{0}$ を含み，有界，遺伝的

遺伝的：$\mathbf{0} \le \boldsymbol{x} \le \boldsymbol{y} \in \mathrm{dom}\, f_{d_i} \Rightarrow \boldsymbol{x} \in \mathrm{dom}\, f_{d_i}$

M$^\natural$ 凹安定結婚モデル：安定割当

$\boldsymbol{x}^* \in \mathbf{Z}_+^E$: 安定割当

$\Updownarrow_{\mathrm{def}}$

- $f_{d_i}(\boldsymbol{x}^*_{d_i}) = \max\{f_{d_i}(\boldsymbol{y}) \mid \boldsymbol{y} \le \boldsymbol{x}^*_{d_i}\}$ $(i = 1, \ldots, n)$
  $f_{h_j}(\boldsymbol{x}^*_{h_j}) = \max\{f_{h_j}(\boldsymbol{y}) \mid \boldsymbol{y} \le \boldsymbol{x}^*_{h_j}\}$ $(j = 1, \ldots, m)$
- ${}^\forall(d_i, h_j) \in E$:
  $f_{d_i}(\boldsymbol{x}^*_{d_i}) \ge \max\{f_{d_i}(\boldsymbol{y}) \mid y(d_i, h_{j'}) \le x^*(d_i, h_{j'}), {}^\forall j' \neq j\}$
  or
  $f_{h_j}(\boldsymbol{x}^*_{h_j}) \ge \max\{f_{h_j}(\boldsymbol{y}) \mid y(d_{i'}, h_j) \le x^*(d_{i'}, h_j), {}^\forall i' \neq i\}$

- どの医師もどの病院も割当 $\boldsymbol{x}^*$ を減らす動機がない
- どの組 (d_i, h_j) に対しても d_i と h_j の両者が $x^*(d_i, h_j)$ を増やす動機を持たない

$\mathrm{M}^\natural$ 凹安定結婚モデル：安定割当

$$f_D(\boldsymbol{x}) = \sum_{d_i \in D} f_{d_i}(\boldsymbol{x}_{d_i}), \quad f_H(\boldsymbol{x}) = \sum_{h_j \in H} f_{h_j}(\boldsymbol{x}_{h_j}) \qquad (\boldsymbol{x} \in \mathbf{Z}^E)$$

${}^{\exists}\boldsymbol{z} \in \mathbf{Z}^E_+$： $\mathrm{dom}\, f_D \subseteq [\mathbf{0}, \boldsymbol{z}]$ かつ $\mathrm{dom}\, f_H \subseteq [\mathbf{0}, \boldsymbol{z}]$

命題 (Fujishige-T. 2007)

f_{d_i} $(i = 1, \ldots, n)$, f_{h_j} $(j = 1, \ldots, m)$ が $\mathrm{M}^\natural$ 凹関数のとき

$\boldsymbol{x}^*$: 安定割当 $\Leftrightarrow$ ${}^{\exists}\boldsymbol{z}_D, \boldsymbol{z}_H \in \mathbf{Z}^E_+$:

- $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{z}_D \vee \boldsymbol{z}_H$,
- $\boldsymbol{x}^* \in \arg\max\{f_D(\boldsymbol{y}) \mid \boldsymbol{y} \leq \boldsymbol{z}_D\}$,
- $\boldsymbol{x}^* \in \arg\max\{f_H(\boldsymbol{y}) \mid \boldsymbol{y} \leq \boldsymbol{z}_H\}$.

拡張 Gale-Shapley アルゴリズム

GGS$(f_D, f_H, \boldsymbol{z})$

$\boldsymbol{x}_H \leftarrow \mathbf{0}$, $\boldsymbol{z}_H \leftarrow \mathbf{0}$, $\boldsymbol{z}_D \leftarrow \boldsymbol{z}$;

repeat {

select $\boldsymbol{x}_D \in \arg\max\{f_D(\boldsymbol{y}) \mid \boldsymbol{x}_H \leq \boldsymbol{y} \leq \boldsymbol{z}_D\}$;

select $\boldsymbol{x}_H \in \arg\max\{f_H(\boldsymbol{y}) \mid \boldsymbol{y} \leq \boldsymbol{x}_D\}$;

for each $e \in E$ with $x_D(e) > x_H(e)$ {

$z_D(e) \leftarrow x_H(e)$;

$z_H(e) \leftarrow z(e)$;

} ;

} **until** $\boldsymbol{x}_D = \boldsymbol{x}_H$;

$\boldsymbol{z}_H \leftarrow \boldsymbol{z}_H \vee \boldsymbol{x}_D$;

return $(\boldsymbol{x}_D, \boldsymbol{z}_D, \boldsymbol{z}_H)$.

拡張 Gale-Shapley アルゴリズム

定理 (Eguchi-Fujishige-T. 2003)

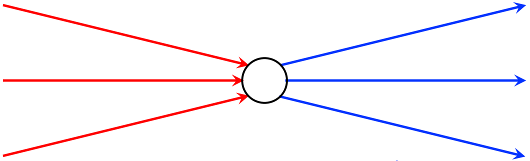
$f_D, f_H : \mathbf{Z}^E \to \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$ が M$^\natural$ 凹関数ならば,
GGS は常に安定割当を出力する

- M$^\natural$ 凹関数の代替性が証明の肝
- モデル化のレシピ [Kojima-T.-Yokoo 2014]
- 現実問題（学科分け）への適用 [赤堀-関口-T. 2017]
- 更なる拡張:
  - Alkan-Gale 2003, Fleiner 2003, Hatfield-Milgrom 2005
  - Fujishige-T. 2006, Fujishige-T. 2007
- ネットワーク化したモデル [Ikebe-T. 2015]

Same-Side Substitutability

E, E^-, E^+ : 有限集合

$(E = E^- \cup E^+)$



$X \subseteq E$ に対し

$X^- = X \cap E^-$

$X^+ = X \cap E^+$

$Ch : 2^E \to 2^E$: 選択関数 $(Ch(X) \subseteq X \ (\forall X \subseteq E))$

定義 (Same-Side Substitutability (Ostrovsky 2008))

$X, Y \subseteq E$ に対し

- $X^+ = Y^+,\ X^- \subseteq Y^- \ \Rightarrow \ X^- \cap (Ch(Y))^- \subseteq (Ch(X))^-$
- $X^+ \subseteq Y^+,\ X^- = Y^- \ \Rightarrow \ X^+ \cap (Ch(Y))^+ \subseteq (Ch(X))^+$

Cross-Side Complementarity

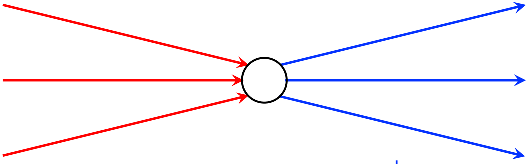
E, E^-, E^+ ：有限集合

$(E = E^- \cup E^+)$

$X \subseteq E$ に対し

$X^- = X \cap E^-$

$X^+ = X \cap E^+$



$Ch : 2^E \to 2^E$ ：選択関数 $(Ch(X) \subseteq X \ (\forall X \subseteq E))$

定義 (Cross-Side Complementarity (Ostrovsky 2008))

$X, Y \subseteq E$ に対し

- $X^+ = Y^+,\ X^- \subseteq Y^- \ \Rightarrow\ (Ch(X))^+ \subseteq (Ch(Y))^+$
- $X^+ \subseteq Y^+,\ X^- = Y^- \ \Rightarrow\ (Ch(X))^- \subseteq (Ch(Y))^-$

Twisted M$^\natural$ 凹関数

$f : \mathbf{Z}^{E^- \cup E^+} \to \mathbf{R} \cup \{-\infty\}$：Twisted M$^\natural$ 凹関数 on (E^-, E^+)

$\Updownarrow_{\text{def}}$

$\hat{f}$: M$^\natural$ 凹　　($\hat{f}$ is defined by $\hat{f}(\boldsymbol{x}_{E^-}, \boldsymbol{x}_{E^+}) = f(-\boldsymbol{x}_{E^-}, \boldsymbol{x}_{E^+})$)

定理 (Ikebe-T. 2015)

f：Twisted M$^\natural$ 凹関数 on (E^-, E^+),

$\boldsymbol{z}_1, \boldsymbol{z}_2 \in \mathbf{Z}^{E^- \cup E^+}$ $(\boldsymbol{z}_1^- = \boldsymbol{z}_2^-,\ \ \boldsymbol{z}_1^+ \le \boldsymbol{z}_2^+)$ に対し

- $\forall \boldsymbol{x}_1 \in \arg\max\{f(\boldsymbol{y}) \mid \boldsymbol{y} \le \boldsymbol{z}_1\}, \exists \boldsymbol{x}_2 \in \arg\max\{f(\boldsymbol{y}) \mid \boldsymbol{y} \le \boldsymbol{z}_2\}$ s.t.
  $\boldsymbol{z}_1^+ \wedge \boldsymbol{x}_2^+ \le \boldsymbol{x}_1^+,\quad \boldsymbol{x}_1^- \le \boldsymbol{x}_2^-$
- $\forall \boldsymbol{x}_2 \in \arg\max\{f(\boldsymbol{y}) \mid \boldsymbol{y} \le \boldsymbol{z}_2\}, \exists \boldsymbol{x}_1 \in \arg\max\{f(\boldsymbol{y}) \mid \boldsymbol{y} \le \boldsymbol{z}_1\}$ s.t.
  $\boldsymbol{z}_1^+ \wedge \boldsymbol{x}_2^+ \le \boldsymbol{x}_1^+,\quad \boldsymbol{x}_1^- \le \boldsymbol{x}_2^-$

$\boldsymbol{z}_1^- \le \boldsymbol{z}_2^-,\ \ \boldsymbol{z}_1^+ = \boldsymbol{z}_2^+$ のときも同様

給与上下限制約付きモデル

- $D = \{d_1, \ldots, d_i, \ldots, d_n\}$：医師の集合
- $H = \{h_1, \ldots, h_j, \ldots, h_m\}$：病院の集合
- $E = D \times H$：医師と病院の組全体

  （多重辺がある状況にも拡張可）

  $E_{d_i} = \{d_i\} \times H$，$E_{h_j} = D \times \{h_j\}$
- $\boldsymbol{x} \in \mathbf{Z}_+^E$：割当ベクトル（割当が離散的）

  $x(d_i, h_j)$：医師 d_i の病院 h_j での勤務時間
- $\boldsymbol{p} \in \mathbf{R}^E$：給与ベクトル

  $p(d_i, h_j)$：医師 d_i の病院 h_j での時間給与
- $\underline{\pi} \in (\mathbf{R} \cup \{-\infty\})^E$：給与ベクトルの下限
- $\overline{\pi} \in (\mathbf{R} \cup \{+\infty\})^E$：給与ベクトルの上限

$$\underline{\pi} \leq \boldsymbol{p} \leq \overline{\pi}$$

給与上下限制約付きモデル

- $f_{d_i} : \mathbf{Z}^{E_{d_i}} \to \mathbf{R} \cup \{-\infty\}$：$d_i$ の貨幣価値の評価関数

$$f_D(\boldsymbol{x}) = \sum_{d_i \in D} f_{d_i}(\boldsymbol{x}_{d_i}) \qquad (\boldsymbol{x} \in \mathbf{Z}^E)$$

($\boldsymbol{x}_{d_i}$ は $\boldsymbol{x}$ の E_{d_i} への制限)

- $f_{h_j} : \mathbf{Z}^{E_{h_j}} \to \mathbf{R} \cup \{-\infty\}$：$h_j$ の貨幣価値の評価関数

$$f_H(\boldsymbol{x}) = \sum_{h_j \in H} f_{h_j}(\boldsymbol{x}_{h_j}) \qquad (\boldsymbol{x} \in \mathbf{Z}^E)$$

($\boldsymbol{x}_{h_j}$ は $\boldsymbol{x}$ の E_{h_j} への制限)

仮定

$\mathrm{dom}\, f_{d_i}, \mathrm{dom}\, f_{h_j}$ は $\mathbf{0}$ を含み，有界，遺伝的

遺伝的：$\mathbf{0} \leq \boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{y} \in \mathrm{dom}\, f_{d_i} \Rightarrow \boldsymbol{x} \in \mathrm{dom}\, f_{d_i}$

給与上下限制約付きモデル

定理 (Fujishige-T. 2007)

f_{d_i} $(d_i \in D)$, f_{h_j} $(h_j \in H)$ が仮定を満たす M♮ 凹関数のとき

$\exists(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{p}^*) \in \mathbf{Z}^E \times \mathbf{R}^E$,

$\exists \boldsymbol{z}_D = (\boldsymbol{z}_{d_i} \mid d_i \in D),\ \boldsymbol{z}_H = (\boldsymbol{z}_{h_j} \mid h_j \in H) \in (\mathbf{Z} \cup \{+\infty\})^E$

$$\boldsymbol{x}^*_{d_i} \in \arg\max\{f_{d_i}[+\boldsymbol{p}^*_{d_i}](\boldsymbol{y}) \mid \boldsymbol{y} \leq \boldsymbol{z}_{d_i}\} \quad (d_i \in D)$$

$$\boldsymbol{x}^*_{h_j} \in \arg\max\{f_{h_j}[-\boldsymbol{p}^*_{h_j}](\boldsymbol{y}) \mid \boldsymbol{y} \leq \boldsymbol{z}_{h_j}\} \quad (h_j \in H)$$

$$\underline{\boldsymbol{\pi}} \leq \boldsymbol{p}^* \leq \overline{\boldsymbol{\pi}}$$

$$\boldsymbol{z}_D(e) < +\infty \implies \boldsymbol{p}^*(e) = \underline{\boldsymbol{\pi}}(e), \quad \boldsymbol{z}_H(e) = +\infty$$

$$\boldsymbol{z}_H(e) < +\infty \implies \boldsymbol{p}^*(e) = \overline{\boldsymbol{\pi}}(e), \quad \boldsymbol{z}_D(e) = +\infty$$

オークションと L♮ 凸関数最小化

$f_j : \mathbf{Z}^m \to \mathbf{R} \cup \{-\infty\}$ $(j = 1, \ldots, n)$：M♮ 凹効用関数

$V_j(\boldsymbol{p}) = \max\{f_j(\boldsymbol{x}) - \langle \boldsymbol{p}, \boldsymbol{x} \rangle \mid \boldsymbol{x} \in \mathbf{Z}^m\}$：間接効用関数

$\Downarrow$ by $\begin{array}{l} f_j^{\circ}(\boldsymbol{p}) = \inf\{\langle \boldsymbol{p}, \boldsymbol{x} \rangle - f_j(\boldsymbol{x}) \mid \boldsymbol{x} \in \mathbf{Z}^m\} \\ V_j = -f_j^{\circ} \end{array}$

V_j $(j = 1, \ldots, n)$ は L♮ 凸関数

$\Downarrow$

Lyapunov 関数 $\sum_{j=1}^{n} V_j(\boldsymbol{p})$ + ($\boldsymbol{p}$ の１次関数) も L♮ 凸関数

Murota-Shioura-Yang 2013

競争均衡を求めるオークション ＝ L♮ 凸関数最小化

離散凸解析を用いた経済モデル

経済均衡モデル（貨幣あり）

- コアの存在，コアと均衡の関係 [Inoue 2008, Yokote 2016]
- トレーディングネットワーク [Ikebe-Sekiguchi-Shioura-T. 2015]

安定結婚モデル（貨幣なし）

- 安定割当の束構造 [Murota-Yokoi 2015]

オークション（貨幣あり）

- 組合せオークション [Lehmann-Lehmann-Nisan 2006]

その他

- 混雑ゲームの解析 [Fujishige-Goemans-Harks-Peis-Zenklusen 2015]
- 整凹ゲーム [Iimura-Watanabe 2014]
- 公平分割 [Goko-Igarashi-Kawase-Makino-Sumita-T.-Yokoi-Yokoo 2022]

目次

離散共役関数

$f : \mathbf{Z}^m \to \mathbf{Z} \cup \{+\infty\}$

定義

$f^\bullet : \mathbf{Z}^m \to \mathbf{Z} \cup \{+\infty\}$: f の離散凸共役関数

$\Updownarrow_{\text{def}}$

$$f^\bullet(\boldsymbol{p}) = \sup\{\langle \boldsymbol{p}, \boldsymbol{x} \rangle - f(\boldsymbol{x}) \mid \boldsymbol{x} \in \mathbf{Z}^m\} \quad (\boldsymbol{p} \in \mathbf{Z}^m)$$

$g : \mathbf{Z}^m \to \mathbf{Z} \cup \{-\infty\}$

定義

$g^\circ : \mathbf{Z}^m \to \mathbf{Z} \cup \{-\infty\}$: g の離散凹共役関数

$\Updownarrow_{\text{def}}$

$$g^\circ(\boldsymbol{p}) = \inf\{\langle \boldsymbol{p}, \boldsymbol{x} \rangle - g(\boldsymbol{x}) \mid \boldsymbol{x} \in \mathbf{Z}^m\} \quad (\boldsymbol{p} \in \mathbf{Z}^m)$$

“離散” フェンシェル双対性の主張

成立して欲しい主張

- $f : \mathbf{Z}^n \to \mathbf{Z} \cup \{+\infty\}$ “離散” 凸関数
- $g : \mathbf{Z}^n \to \mathbf{Z} \cup \{-\infty\}$ “離散” 凹関数
- ある種の前提条件
  （$\mathrm{dom}\, f$ と $\mathrm{dom}\, g$ の内点集合の交わりが非空など）

$$\min\{f(\boldsymbol{x}) - g(\boldsymbol{x}) \mid \boldsymbol{x} \in \mathbf{Z}^n\} = \max\{g^{\circ}(\boldsymbol{p}) - f^{\bullet}(\boldsymbol{p}) \mid \boldsymbol{p} \in \mathbf{Z}^n\}$$

関数値が整数のため inf は min となる

離散フェンシェル双対定理

$$\min\{f(\boldsymbol{x}) - g(\boldsymbol{x}) \mid \boldsymbol{x} \in \mathbf{Z}^n\} = \max\{g^\circ(\boldsymbol{p}) - f^\bullet(\boldsymbol{p}) \mid \boldsymbol{p} \in \mathbf{Z}^n\}$$

$f \backslash g$	整凹	$\mathrm{M}^\natural$ 凹	$\mathrm{L}^\natural$ 凹	分離凹
整凸	×	×	×	●
$\mathrm{M}^\natural$ 凸	×	●	×	○
$\mathrm{L}^\natural$ 凸	×	×	●	○
分離凸	○	○	○	○

- {分離凸} = $\{\mathrm{M}^\natural$ 凸$\} \cap \{\mathrm{L}^\natural$ 凸$\}$
- $\{\mathrm{M}^\natural$ 凸$\} \subset$ {整凸}, $\{\mathrm{L}^\natural$ 凸$\} \subset$ {整凸}
- $\mathrm{M}^\natural$ 凸の共役 = $\mathrm{L}^\natural$ 凸, $\mathrm{L}^\natural$ 凸の共役 = $\mathrm{M}^\natural$ 凸

フェンシェル双対定理（M♮ 版）

定理 (Murota 1996)

- $f : \mathbf{Z}^m \to \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$ M♮ 凸関数
  $h : \mathbf{Z}^m \to \mathbf{R} \cup \{-\infty\}$ M♮ 凹関数
  $\mathrm{dom}\, f \cap \mathrm{dom}\, h \neq \emptyset$ または $\mathrm{dom}\, f^{\bullet} \cap \mathrm{dom}\, h^{\circ} \neq \emptyset$ のとき
  $$\inf\{f(\boldsymbol{x}) - h(\boldsymbol{x}) \mid \boldsymbol{x} \in \mathbf{Z}^m\} = \sup\{h^{\circ}(\boldsymbol{p}) - f^{\bullet}(\boldsymbol{p}) \mid \boldsymbol{p} \in \mathbf{R}^m\}$$
  両辺が有限値ならば sup を達成する $\boldsymbol{p}$ が存在する
- $f : \mathbf{Z}^m \to \mathbf{Z} \cup \{+\infty\}$ M♮ 凸関数
  $h : \mathbf{Z}^m \to \mathbf{Z} \cup \{-\infty\}$ M♮ 凹関数
  $\mathrm{dom}\, f \cap \mathrm{dom}\, h \neq \emptyset$ または $\mathrm{dom}\, f^{\bullet} \cap \mathrm{dom}\, h^{\circ} \neq \emptyset$ のとき
  $$\inf\{f(\boldsymbol{x}) - h(\boldsymbol{x}) \mid \boldsymbol{x} \in \mathbf{Z}^m\} = \sup\{h^{\circ}(\boldsymbol{p}) - f^{\bullet}(\boldsymbol{p}) \mid \boldsymbol{p} \in \mathbf{Z}^m\}$$
  両辺が有限値ならば inf, sup を達成する $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{p}$ が存在する

フェンシェル双対定理（L$^\natural$ 版）

定理 (Murota 1998)

- $g : \mathbf{Z}^m \to \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$ L$^\natural$ 凸関数
  $k : \mathbf{Z}^m \to \mathbf{R} \cup \{-\infty\}$ L$^\natural$ 凹関数
  $\mathrm{dom}\, g \cap \mathrm{dom}\, k \neq \emptyset$ または $\mathrm{dom}\, g^\bullet \cap \mathrm{dom}\, k^\circ \neq \emptyset$ のとき
  $$\inf\{g(\boldsymbol{p}) - k(\boldsymbol{p}) \mid \boldsymbol{p} \in \mathbf{Z}^m\} = \sup\{k^\circ(\boldsymbol{x}) - g^\bullet(\boldsymbol{x}) \mid \boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^m\}$$
  両辺が有限値ならば sup を達成する $\boldsymbol{x}$ が存在する
- $g : \mathbf{Z}^m \to \mathbf{Z} \cup \{+\infty\}$ L$^\natural$ 凸関数
  $k : \mathbf{Z}^m \to \mathbf{Z} \cup \{-\infty\}$ L$^\natural$ 凹関数
  $\mathrm{dom}\, g \cap \mathrm{dom}\, k \neq \emptyset$ または $\mathrm{dom}\, g^\bullet \cap \mathrm{dom}\, k^\circ \neq \emptyset$ のとき
  $$\inf\{g(\boldsymbol{p}) - k(\boldsymbol{p}) \mid \boldsymbol{p} \in \mathbf{Z}^m\} = \sup\{k^\circ(\boldsymbol{x}) - g^\bullet(\boldsymbol{x}) \mid \boldsymbol{x} \in \mathbf{Z}^m\}$$
  両辺が有限値ならば $\inf, \sup$ を達成する $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{x}$ が存在する

整凸／分離凸フェンシェル双対定理

定理 (Murota-T. 2021)

- $f : \mathbf{Z}^n \to \mathbf{Z} \cup \{+\infty\}$ 整凸関数
- $\Psi : \mathbf{Z}^n \to \mathbf{Z} \cup \{-\infty\}$ 分離凹関数
- 以下の左辺あるいは右辺が有界ならば

$$\min\{f(\boldsymbol{x}) - \Psi(\boldsymbol{x}) \mid \boldsymbol{x} \in \mathbf{Z}^n\} = \max\{\Psi^\circ(\boldsymbol{p}) - f^\bullet(\boldsymbol{p}) \mid \boldsymbol{p} \in \mathbf{Z}^n\}$$

- $\Psi(\boldsymbol{x}) = \sum_i \psi_i(x_i) \implies \Psi^\circ(\boldsymbol{p}) = \sum_i \psi_i^\circ(p_i)$
- $\phi(x) = \alpha|x - x_0| \implies \phi^\bullet(p) = \begin{cases} x_0 p & (|p| \leq \alpha) \\ +\infty & (\text{o.w.}) \end{cases}$
- $\phi(x) = \beta(x - x_0)^2 \implies$

$$\phi^\bullet(p) = x_0 p + \left\lfloor \frac{p+\beta}{2\beta} \right\rfloor \left(p - \beta \left\lfloor \frac{p+\beta}{2\beta} \right\rfloor \right)$$

離散フェンシェル双対性が不成立な例

- $f(x_1, x_2) = \max\{0, x_1 + x_2\} \quad ((x_1, x_2) \in \mathbf{Z}^2)$: M♮ 凸
- $g(x_1, x_2) = \min\{x_1, x_2\} \quad ((x_1, x_2) \in \mathbf{Z}^2)$: L♮ 凹

このとき

- $f^\bullet(p_1, p_2) = \begin{cases} 0 & ((p_1, p_2) = (0,0), (1,1)) \\ +\infty & (\text{o.w.}) \end{cases}$
- $g^\circ(p_1, p_2) = \begin{cases} 0 & ((p_1, p_2) = (1,0), (0,1)) \\ -\infty & (\text{o.w.}) \end{cases}$

$$0 = \min\{f - g\} > \max\{g^\circ - f^\bullet\} = -\infty$$

$h = f - g = \max\{|x_1|, |x_2|\}$ は整凸関数
離散の場合は，凸＋凸の分け方に双対性が依存

今後の展望・課題

今後の展望・課題：

- 整凸関数（あるいはサブクラス）について，離散凸共役関数は何か？
- 整凸／分離凸フェンシェル双対定理において，分離凸関数を正則化項とみなして何かできないか
- 整凸／分離凸フェンシェル双対定理の応用例？

参考図書

- 室田一雄: 離散凸解析, 共立出版 (2001)
- Murota, Kazuo: Discrete Convex Analysis. Society for Industrial and Applied Mathematics (2003)
- Fujishige, Satoru: Submodular Functions and Optimization (2nd Edn.), Elsevier (2005)
- 室田一雄: 離散凸解析の考えかた, 共立出版 (2007) [重版出版]
- 田村明久: 離散凸解析とゲーム理論, 朝倉書店 (2009)
- 室田一雄, 塩浦昭義: 離散凸解析と最適化アルゴリズム, 朝倉書店 (2013)
- Murota, Kazuo: Discrete convex analysis: A tool for economics and game theory. Journal of Mechanism and Institution Design **1**, 151–273 (2016)
- 室田一雄: 離散凸解析+副題 (未定), シリーズ「数理と経済」, 丸善出版 (2024)